SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ALISSON GLEIKE MORAES

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS NO LANÇAMENTO DE FOGUETES CONFECCIONADOS COM GARRAFAS PET

Porto Velho
2014

ALISSON GLEIKE MORAES

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS NO LANÇAMENTO DE FOGUETES CONFECCIONADOS COM GARRAFAS PET

Trabalho de Conclusão apresentado ao Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT no Polo da Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva

Porto Velho
2014

FICHA CATALOGRÁFICA

BIBLIOTECA PROF. ROBERTO DUARTE PIRES

M8275c

Moraes, Álisson Gleike

Uma contribuição ao ensino-aprendizagem da matemática na educação básica: aplicação das funções quadráticas no lançamento de foguetes confeccionados com garrafas pet /Álisson Gleike Moraes. Porto Velho, Rondônia, 2014.

91f.: il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) Fundação Universidade Federal de Rondônia / UNIR.

Orientador: Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva

1. Equação do 2º grau 2. Função quadrática 3. Lançamento de foguete I. Silva, Marinaldo Felipe da M. II. Título.

CDU: 51

Bibliotecária Responsável: Ozelina Saldanha CRB11/947

Alisson Gleike Moraes

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS NO LANÇAMENTO DE FOGUETES CONFECCIONADOS COM GARRAFAS PET

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática Aplicada, aprovado no dia 15 de abril de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos docentes:.

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva
Orientador/Presidente
PROFMAT/UNIR

Prof. Ms. Ronaldo Chaves Cavalcanti
PROFMAT / UNIR

Prof. Ms. Sandro Ricardo Pinto da Silva
PROFMAT UFAC

À minha mãe Esmeralda Velasques Morais por sempre incentivar meus estudos, acreditando que era possível chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus, acima de tudo, por ter me proporcionado esta oportunidade e que me deu forças para trilhar esse caminho nada fácil, foram muitas noites sem dormir e dias muito cansativos, mas que valeram a pena.

A minha esposa Elizabeth, por todo carinho dispensado durante este mestrado e pela paciência de me esperar todas as noites que passei fora de casa estudando com meus colegas.

Aos meus filhos Alisson Júnior e Maria Eduarda, pela compreensão durante os finais de semana em que estive fora estudando.

Aos meus amigos de curso pela ajuda e pela generosidade em compartilhar seu conhecimento.

À coordenação Nacional do curso, que nos proporcionou uma oportunidade única.

Aos professores do PROFMAT pela oportunidade de ampliar meus conhecimentos por meio deste Mestrado, em especial Tomás Rodrigues, Marinaldo Felipe, Adeilton Fernandes, Ronaldo Cavalcanti e Flávio Simão.

RESUMO

O conteúdo de função é um dos assuntos mais importantes da matemática, tendo grande aplicabilidade nas disciplinas de física e nas áreas da engenharia, entre outras. Este trabalho tem como objetivo contribuir com o ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Básica. Para tal apresenta em ordem cronológica um estudo das equações do 2º grau, suas características e propriedades. De forma análoga fornece as características e propriedades da função quadrática, a saber: forma canônica, valores de máximo e mínimo, zeros, forma fatorada, estudo do sinal e um estudo detalhado dos gráficos. Concatenados a tal, são fornecidos relatos de experimentos (oficinas), ou seja, o lançamento de foguetes confeccionados com garrafas pet, relacionando o abstrato (teoria) com o concreto (lançamento de foguetes) onde o aluno pode ver na prática (oficinas) algumas aplicações do conteúdo de função quadrática.

Palavras - chave: Equação do 2º grau. Função Quadrática. Lançamento de Foguete.

ABSTRACT

The contents of function is one of the most important subjects of mathematics, having wide applicability in the disciplines of physics and in the areas of engineering, among others. This paper aims to contribute to the teaching and learning of Mathematics in Primary Education. To this presents in chronological order a study of the equations of 2nd degree, their characteristics and properties. Analogously provides the characteristics and properties of quadratic functions, namely canonical form, maximum and minimum values, zeros, factored form, signal and study a detailed study of the charts. Concatenated such , are provided reports of experiments (workshops), ie, launching rockets made with plastic bottles, relating the abstract (theory) with concrete (rocket launch) where the student can see in practice (workshops) some applications of content quadratic function.

Keywords - Keywords: Equation of 2nd degree . Quadratic function. Launch Rocket .

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática, ao longo de sua história, vem passando por grandes mudanças no tocante à forma como se concebe o processo de ensino-aprendizagem. Acredita-se que tais mudanças tenham ocorrido devido à necessidade de aproximar cada vez mais esse ensino da realidade dos mesmos.

O estudo das funções é um dos conteúdos mais importantes da matemática, tendo grande aplicabilidade principalmente na disciplina de Física e nas áreas da Engenharia. Dar início ao estudo desse conteúdo de maneira diferenciada, usando uma experiência onde o aluno possa testar suas hipóteses e verificar na prática os resultados, pode proporcionar ao educando um grande aprendizado que vai além do conteúdo aplicado em sala de aula.

No primeiro capítulo trabalhamos os conteúdos de equações do 2º grau, relembrando um problema antigo e outro prático. Usamos a técnica de completamento de quadrado que não costuma ser apresentado no Ensino Fundamental.

No segundo Capítulo, definimos função quadrática e estudamos a forma canônica da função quadrática. A forma canônica é uma das representações mais importantes da função quadrática, pois dela extraímos um grande número de informações das funções quadráticas. E seu estudo é pouco explorado no Ensino Fundamental e Médio. A partir da forma canônica determinamos: os zeros da função, o valor máximo e mínimo e a influência do coeficiente **a** na função.

No terceiro Capítulo, estudamos o gráfico da função quadrática, e definimos que o gráfico da função quadrática é uma parábola. Na sequência do capitulo utilizamos o *software* Geogebra para construir o gráfico da função quadrática. Estudamos também neste capitulo as translações verticais e horizontais da função quadrática.

No quarto Capítulo, utilizamos o gráfico da função quadrática para descobrir os zeros da função e fazer o estudo do sinal da função que foi visto de forma algébrica na Seção 2.1 e 2.2, encerramos esse capítulo com a Seção 4.3 mostrando que a função possui eixo de simetria.

No quinto Capítulo mostramos o material necessário para construção do foguete de garrafa pet assim como a forma de construir esse foguete. Na sequência do capítulo mostramos os materiais necessários para a construção da base de lançamento do foguete. A construção dessa base foi mostrada detalhadamente através das Figuras 5.3 até 5.12.

No sexto Capítulo serão apresentados os objetivos do projeto de lançamento de foguete com garrafa pet. Também apresentar-se-á a metodologia do campeonato de lançamento de foguete com garrafa pet, onde o aluno terá contato com uma atividade prática relacionada ao conteúdo de funções estudado em sala de aula, aproximando-o assim de uma atividade experimental, onde ele terá autonomia para elaborar e testar suas hipóteses.

Para finalizarmos os nossos estudos apresentamos no sétimo Capítulo os resultados obtidos na competição de lançamento de foguetes com garrafa pet, assim como a análise dos dados utilizando o *software* epi Info.

1 PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

As equações do 2º grau são resolvidas através de uma expressão matemática atribuída ao matemático indiano Bháskara. Mas analisando a linha cronológica dos fatos, identificamos diversos nomes ligados ao desenvolvimento da Matemática, contribuindo na elaboração de uma forma prática para o desenvolvimento de tais equações.

Babilônios, egípcios e gregos utilizavam técnicas capazes de resolver esse tipo de equação antes de Cristo. Babilônios e egípcios utilizavam-se de textos e símbolos como ferramenta auxiliar na resolução. Os gregos conseguiam concluir suas resoluções realizando associações com a geometria, pois eles possuíam uma forma geométrica para solucionar problemas ligados a equações do 2º grau.

Começaremos nosso estudo resolvendo um problema histórico e outro prático envolvendo equações do 2º grau, assunto já conhecido pelo aluno e que servirá de motivação para definirmos função quadrática.

Problemas envolvendo equações do segundo grau estão entre os mais antigos: Encontrar dois números a e b, conhecendo sua soma e seu produto, $\boldsymbol{a+b=s}$ e $\boldsymbol{ab=p}$, que podemos resolver hoje em dia por meio de uma equação do 2º grau, são encontradas em tabletes da Babilônia[1] antiga a quase 4000 anos.

Problema 1.1. (Problema histórico). Encontrar dois números conhecendo apenas a sua soma e o seu produto.

Solução: Considere a soma como s e o produto como p. Sendo um dos números procurados x o outro será s – x e dessa forma o produto será

$$p=(s-x)x,$$

[1] Quando mencionarmos babilônios ou civilização babilônica estamos nos referindo aos povos que habitaram a região da mesopotâmia, como os sumérios, os acadianos, os caldeus, os assírios entre outros povos antigos. Usaremos o termo babilônios, como é comum, (assim como Eves [2]) por simples conveniência.

ou seja,

$$x^2 - sx + p = 0. \tag{1.1}$$

Um outro enunciado para esse mesmo problema seria determinar os lados de um retângulo cujo o semiperímetro é **s** e a área é **a**.

Vale salientar que representar a solução desse problema por meio de uma equação é como fazemos nos dias atuais, pois os povos antigos não conheciam esse mecanismo de representação, que só começou a ser utilizado por Viète[2], no final do século XVI. Para resolver esse tipo de expressão os Babilônios possuíam uma receita, que segundo Elon [3] era enunciada assim:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Essa regra nos fornece, em nossa notação atual, os números

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{e} \quad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \tag{1.2}$$

Os passos para encontrar os valores procurados não eram justificados, pois eles não se preocupavam com demonstrações.

De acordo com Elon et al [4] há indícios de que os Babilônios chegaram a essas expressões da seguinte maneira:

Considerando α e β os números procurados, são conhecidos dois números s e p, tais que $s = \alpha + \beta$ e $p = \alpha\beta$. Assim, apesar de α e β serem desconhecidos, a média aritmética $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{2}$ é conhecida e possui a propriedade de ser equidistante de α e de β.

[2] Deve-se ao matemático francês François Viète, nascido em 1540, a introdução da prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes como menciona Eves [2] p.309.

Admitindo que $\alpha \leq \beta$, temos que $\frac{s}{2} - \alpha = \beta - \frac{s}{2}$. Chamando esta diferença comum de d, o problema inicial de encontrar os dois números α e β, se reduz a encontrar o único número d, pois $\alpha = \frac{s}{2} - d$ e $\beta = \frac{s}{2} - d$.

Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
p &= \alpha\beta \\
&= \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) \\
&= \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2
\end{aligned}
$$

logo

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p$$

como d não é negativo,

$$d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

daí

$$\alpha = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

e

$$\beta = \frac{s}{2} + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

Outra maneira de obter os valores encontrados pelos babilônios é o método de completar quadrado, ao qual daremos ênfase, tendo em vista sua importância no estudo das funções quadráticas.

Apesar de todo seu valor, esse tema ainda encontra alguma resistência no Ensino Básico e no Ensino Médio é presentado apenas quando se trabalha com equações de circunferências.

Quando trabalhamos com equações quadráticas no 9º ano do Ensino Fundamental, procuramos inicialmente os valores de x que a resolvam. Começamos sempre com os casos mais simples:

$$ax^2 + c = 0,$$

que pode ser resolvida isolando o valor de x:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\ .$$

O aluno trabalha com exemplos como esse, porém no caso do trinômio estar em sua forma completa o professor abandona esse método de resolução e já apresenta as fórmulas resolutivas para resolver as equações.

É interessante que o professor trabalhe casos do tipo:

$$a(x + m)^2 + k \ = \ 0,$$

onde podemos usar o mesmo raciocínio anterior e isolando o valor de x, encontramos:

$$x = -m \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

ou seja, a ideia é partir de um trinômio completo ($ax^2 + bx + c$) e chegar a uma expressão conhecida, $a(x + m)^2 + k$, que sabemos como determinar sua solução.

Na próxima Seção estudaremos como chegar a essa expressão conhecida partindo de um trinômio do segundo grau completo.

1.1 Método de Completamento de Quadrado

Temos o trinômio $x^2 - sx + p$ e nosso intuito é escrevê-lo como um quadrado perfeito do tipo $x^2 - 2kx + k^2$. Já possuímos:

$$x^2 - 2\frac{s}{2}x + p$$

mas falta a parcela $\left(\frac{s}{2}\right)^2$, então, para não alterarmos o trinômio, somamos e subtraímos essa parcela:

$$x^2 - 2\frac{s}{2}x + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p.$$

Dessa forma:

$$x^2 - sx + p = \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p.$$

Com esse trinômio fatorado, podemos obter a solução da equação (1.1). De fato:

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p = 0$$

é equivalente a:

$$x - \frac{s}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

ou seja,

$$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

que é a solução trabalhada pelos babilônios a quase 4000 anos.

Exemplo 1.1. *Quais são os números cuja a soma é 8 e o produto é 15?*

Solução: Neste exemplo temos s = 8 e p = 15, assim, se um dos números é x o outro será $8 - x$, e o produto é $x(8 - x) = 15$, que dá origem a equação do segundo grau:

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Completando quadrado, obtemos:

$$(x - 4)^2 - 16 + 15 = 0,$$

que é equivalente a:

$$(x - 4)^2 = 1.$$

Assim

$$x - 4 = \pm 1,$$

portanto:

$$x = 5 \text{ ou } x = 3.$$

Observe que achar dois números cuja soma é 8 e cujo o produto é 15, não é uma tarefa complicada, e sem grandes dificuldades, poderíamos chegar aos números 3 e 5 por inspeção.

É importante que o professor explore essa prática de resolver problemas por inspeção ou tentativa, dando liberdade para que o aluno procure soluções sem utilizar seu caderno, estimulando assim o raciocínio lógico e o cálculo mental que é de suma importância para a vida acadêmica. É necessário também que o professor acompanhe atentamente esse desenvolvimento, pois nem sempre é tão simples resolver equações por esse método.

Por exemplo, se queremos dois números, cuja soma é 1 e cujo produto é –1, a resposta não é tão elementar como no caso anterior. Como veremos, esses números não são inteiros, o que acaba dificultando o cálculo mental.

Para $s = 1$ e $p = -1$, podemos escrever:

$$x(1-x) = -1,$$

ou seja,

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Completando quadrado, temos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0,$$

que é equivalente a

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0,$$

Assim

$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Logo

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

O valor positivo encontrado para x é conhecido como número de ouro[3].

O problema a seguir é uma situação prática, que inicialmente parece ser somente de geometria, mas que recai em uma equação do segundo grau ao buscarmos uma expressão para a área.

Problema 1.2. *Meu avô possui um terreno retangular com dimensões 22m x 30m. Sabe-se que um dos lados que mede 22m já possui um muro construído e ele quer utilizar parte desse muro para fazer um cercado retangular de 48m². Dispondo de 28m de tela é possível construir esse cercado? Quais são as medidas dos seus lados?*

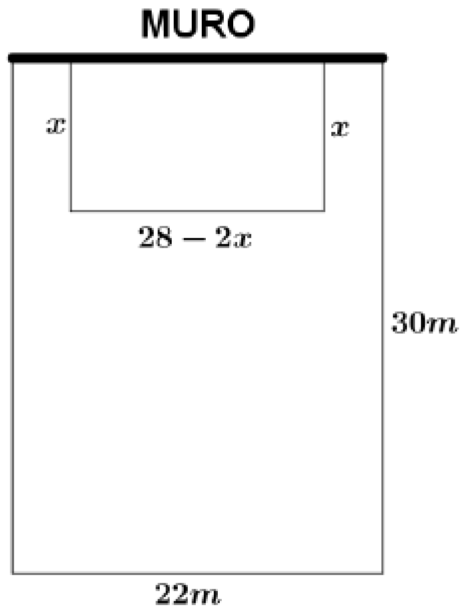

Figura 1.1: Vista superior do terreno de 22m x 30m.

Solução: Se chamarmos a medida de um dos lados do cercado de x, a outra medida será $(28-2x)$. Admitindo que o lado que mede x é o não paralelo ao muro, a área do cercado é $x(28-2x)$ e podemos escrever:

$$x(28-2x) = 48, \text{ ou seja, } x^2 - 14x + 24 = 0.$$

[3] O número de ouro é considerado um símbolo de harmonia. Aparece na natureza, na arte, arquitetura, música e nos seres humanos. Por exemplo a razão entre um termo e seu antecessor na sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) converge para o número de ouro.

Completando quadrado:

$$(x-7)^2 - 49 + 24 \ = 0;$$

o que nos leva a

$$(x-7)^2 \ = \ 25,$$

e assim

$$x - 7 = \pm 5,$$

ou seja,

$$x = 12 \text{ ou } x = 2.$$

Encontramos duas soluções para a equação $x^2 - 14x + 24 = 0$, porém só uma delas satisfaz nosso problema, pois para $x = 2$, o cercado terá dimensões 24m x 2m, o que não é possível, já que o muro só possui 22m de extensão.

Desse modo, a única solução possível para o problema é $x = 12$, teremos assim um cercado com dimensões 4m x 12m, utilizando apenas, 4m do muro.

Observe que temos duas soluções distintas para a nossa equação, mas uma delas não é solução do nosso problema. É importante que o aluno perceba, através de problemas como este, que nem sempre as raízes da equação são as soluções do problema, cabendo a ele analisar e decidir quais delas se adequam a condição estabelecida inicialmente.

Problemas que possuem mais de uma solução, infelizmente, não são bem explorados em nosso ensino básico, talvez para não haver maiores explicações, visto que situações desse tipo necessitam de uma análise mais complexa e aprofundada, gerando uma maior discussão. Esse tipo de análise acaba desenvolvendo, no aluno, um senso crítico e avaliador, que busca examinar cada solução encontrada e comparar com a realidade do problema.

2 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Ao definirmos função quadrática, estaremos admitindo que o aluno já conhece o conceito de função e suas propriedades.

Elon [3] ressalta a importância de ter objetividade ao se definir o conceito de função:

> Um exemplo flagrante da falta de objetividade (que persiste até hoje em quase todos os livros didáticos brasileiros) é a definição de função como um conjunto de pares ordenados. Função é um dos conceitos fundamentais da matemática (o outro é conjunto). Os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar numa função de modo dinâmico, em contraste com essa concepção estática (. . .)
> Para um matemático, ou um usuário da Matemática, uma função $f: X \rightarrow Y$, cujo o domínio é o conjunto X e contra-domínio o conjunto Y , é uma correspondência (isto é, uma regra, um critério, um algoritmo ou uma série de instruções) que estabelece, sem exceções nem ambiguidade, para cada elemento x em X, sua imagem f(x) em Y.

Definição 2.1. *Chamaremos de função quadrática, ou função polinomial do segundo grau, a função* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*, que associa a cada* $x \in \mathbb{R}$ *o valor* $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$*, com a, b e c números reais e a ≠ 0.*

Algumas vezes, ao longo do texto, vamos nos referir a função quadrática simplesmente por f.

Exemplo 2.1.

i) A função $f(x) = x^2 - 3x + 7$ é uma função quadrática, com a = 1, b = – 3 e c = 7;

ii) A função $f(x) = -9x^2 + 4x$ é uma função quadrática, com a = – 9, b = 4 e c = 0;

iii) A função $f(x) = 5x^2$ é uma função quadrática, com a = 5; b = 0 e c = 0;

iv) A função $f(x) = 2x - 17$ não é uma função quadrática, pois a = 0.

O fato do valor de **a** ser diferente de zero, garante que exemplos como o (iv), não sejam consideradas funções quadráticas, do contrário teríamos a função afim como um caso particular dessas funções.

2.1 Forma Canônica

Considere o trinômio $ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** reais e **a** ≠ 0.

Colocando **a** em evidência e utilizando a técnica de completar quadrado, temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Podemos assim, reescrever a lei de formação da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ da seguinte forma:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (2.1)$$

De maneira equivalente:

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \qquad (2.2)$$

onde

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \ e \ y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

A equação 2.2 é a chamada forma canônica da função quadrática e a partir da qual, obteremos propriedades importantes da f.

1ª Propriedade: *Valor máximo e valor mínimo*

Definição 2.2. *Dado $m \in \mathbb{R}$, dizemos que f(m) é o valor máximo da função f se $f(x) \leq f(m)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e dizemos que f(m) é o valor mínimo se $f(x) \geq f(m)$; $\forall x \in \mathbb{R}$*

Note que a forma canônica (2.2) da função f é composta por duas parcelas, a parcela: $a(x - x_0)^2$ que varia com x e a parcela $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$, formada apenas por valores constantes.

Se $a > 0$, então $a(x - x_0)^2 \geq 0$ e

$$a(x - x_0)^2 + y_0 \geq 0 + y_0.$$

Assim:

$$f(x) \geq y_0,$$

ou seja, f atinge o valor mínimo $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ quando $x - x_0 = 0$, ou ainda, em $x = x_0$.

Se $a < 0$, então $a(x - x_0)^2 \leq 0$ e

$$a(x - x_0)^2 + y_0 \leq 0 + y_0.$$

Assim:

$$f(x) \leq y_0,$$

ou seja, f atinge o valor máximo $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ quando $x - x_0 = 0$, ou ainda, em $x = x_0$.

Sendo assim, o ponto do domínio $x_0 = -\frac{b}{2a}$ é o ponto que maximiza ou minimiza a função, dependendo exclusivamente do sinal de a.

Resumindo:

- Se $a > 0$ a função admite um valor mínimo;
- Se $a < 0$ a função admite um valor máximo.

Desse modo, estando a função em sua forma canônica, determinar os valores máximo ou mínimo (dependendo do sinal de a) é muito simples. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.2. Encontre o valor mínimo da função $f(x) = x^2 - 10x + 21$.

Solução: Escrevendo f(x) em sua forma canônica, temos:

$f(x) = (x - 5)^2 - 25 + 21$, ou seja, $f(x) = (x - 5)^2 - 4$. O valor mínimo da função é – 4 que ocorre no ponto do domínio x = 5.

Vamos, agora, pensar no Problema 1.2, de uma maneira um pouco diferente.

Problema 2.1. Meu avô possui um terreno retangular com dimensões 22m x 30m. Sabe-se que um dos lados de medida 22m já possui um muro construído e ele quer utilizar parte desse muro para fazer um cercado retangular. Dispondo de 28m de tela, quais são as medidas dos lados desse cercado para que ele consiga a maior área possível.

Solução: Considerando x a medida do lado não paralelo ao muro, o lado que é paralelo mede $(28 - 2x)$, dessa forma temos que a área (em m^2) é uma função do lado x, que vamos denotar por

$$A(x) = x(28 - 2x)$$

Escrevendo a expressão $A(x) = x(28 - 2x)$ em sua forma canônica, obtemos:

$$A(x) = -2(x - 7)^2 + 98,$$

logo, sua área máxima será de $98m^2$, sendo possível quando x = 7m e o lado paralelo ao muro possuir 14m de comprimento.

2ª Propriedade: *Zeros da função quadrática*

Os zeros da função f são os valores de x para os quais $f(x) = 0$, ou de forma equivalente são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Observe que a resolução do Problema 1.2 é na verdade a busca das raízes da equação $x^2 - 14x + 24 = 0$.

Determinar os zeros da função quadrática, estando ela em sua forma canônica, não é uma tarefa complicada. De fato, partindo de $f(x) = 0$, obtemos a equação:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \qquad (2.3)$$

cuja solução é a "famosa" fórmula[4] apresentada no ensino básico:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2.4)$$

O termo $b^2 - 4ac$ é representado pela letra grega Δ (delta),

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad (2.5)$$

e tem importância fundamental no estudo das raízes da equação do segundo grau.

Com essa nova notação, a equação (2.4) pode ser representada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (2.6)$$

Não vemos motivo para que essa expressão seja apresentada ao aluno como a fórmula para encontrar as raízes da equação do segundo grau, pois o método de completar quadrado cumpre muito bem esta tarefa.

---

[4] De maneira equivocada, essa expressão é conhecida como fórmula de Bháskara no Ensino Básico brasileiro. Ao longo do texto vimos que a resolução de equações quadráticas por meio de fórmulas resolutivas já era trabalhada a quase 4000 anos e o matemático Árabe Báskhara é do século 12. Sendo assim, não faz sentido batizar a fórmula com o nome desse matemático.

Carregar o aluno com fórmulas que não possuam significado conclusivo, acaba privilegiando o aprendizado mecânico, que não desenvolve o raciocínio do aluno e desperdiça todo potencial que ele possui para buscar o aprendizado.

Contudo, a partir da análise da fórmula (2.6) podemos extrair informações importantes sobre o estudo das raízes da equação do segundo grau. Das equações 2.3 e 2.5 obtemos a equação:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

que só tem solução quando $\Delta \geq 0$, já que o primeiro membro da equação é um número elevado ao quadrado. Dizemos então que:

- Se $\Delta \geq 0$, a função possui zeros reais;
- Caso contrário, ou seja, $\Delta < 0$, a função não possui zeros reais.

Quando $\Delta = 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, portanto, $x = -\frac{b}{2a}$ é o único zero da função.

Quando estamos trabalhando com equações do segundo grau e o valor de Δ é negativo, a equação não possui solução no conjunto dos números reais. Nos próximos capítulos, veremos que mesmo a função não possuindo zeros reais, ainda é possível, por exemplo, esboçar seu gráfico e determinar o ponto de máximo ou de mínimo.

Exemplo 2.3. *Determine os zeros das seguintes funções:*

a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

Do completamento de quadrados temos:

$$x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

que equivale a:

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

ou seja,

$$x=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

Portanto

$$x=-2 \text{ ou } x=-3.$$

b) $f(x)=2x^2-3x+5$

Completando quadrado temos:

$$2x^2-3x+5=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}=0,$$

que é equivalente a:

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{31}{16}.$$

Logo a função não possui zeros reais, pois o primeiro membro é um termo elevado ao quadrado e maior ou igual a zero e o segundo membro é negativo.

c) $f(x)=-x^2+2x-1$

Completando quadrado temos:

$$-x^2+2x-1=(-1)(x-1)^2=0,$$

que é equivale a:

$$(x-1)^2=0,$$

ou seja,

$$x = 1.$$

Neste caso um único valor é zero desta função.

2.2 Forma Fatorada

Para escrever a forma fatorada da função quadrática, precisamos das expressões para a soma e o produto das raízes da equação do segundo grau em função apenas de seus coeficientes. Chamando as raízes da equação de

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ e \ \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e denotando por s a soma das raízes obtemos:

$$\begin{aligned} s &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Denotando por p o produto das raízes e procedendo de maneira análoga:

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\ &= (-1)\left[\frac{(b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}\right] \\ &= (-1)\left[\frac{-b^2 + b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sejam α e β as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Colocando a em evidência na lei de formação da função f e usando as equações (2.7) e (2.8) obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= a[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] \\ &= a[x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta] \\ &= a[x(x - \alpha) - \beta(x - \alpha)] \\ &= a[(x - \alpha)(x - \beta)]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

A função polinomial do segundo grau escrita na forma (2.9) é chamada forma fatorada, a partir da qual obteremos mais uma propriedade importante da f.

3ª Propriedade: *Sinal da função*

Estudar o sinal de uma função f é encontrar os valores de x para os quais a imagem f(x) é um número negativo e os valores de x para os quais a imagem f(x) é um número positivo.

Sejam α e β os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e vamos admitir $\alpha < \beta$.

Para os valores de x que estão entre as raízes ($\alpha < x < \beta$), o produto $(x - \alpha)(x - \beta)$ é negativo, assim pela equação (2.9) o sinal de f será contrário ao de $\boldsymbol{a}$.

Para os valores ($x < \alpha$ ou $x > \beta$) de x que estão nas extremidades de α e β, o produto $(x - \alpha)(x - \beta)$ é positivo e pela equação (2.9) o sinal de f é o mesmo de $\boldsymbol{a}$.

Caso α seja igual a β, pela equação (2.9) temos $f(x) = a(x - \alpha)^2$, neste caso a função se anula apenas para $x = \alpha$ e terá o mesmo sinal de $\boldsymbol{a}$ para os demais valores reais de x, visto que $(x - \alpha)^2$ é sempre positivo, se $x \neq \alpha$.

No caso da função não possuir zeros reais, não podemos escrevê-la em sua forma fatorada, porém o estudo de seus sinais pode ser analisado através do valor máximo ou mínimo que a função assume.

Da Seção 2.1 sabemos que se $a > 0$ a função possui valor mínimo $-\dfrac{\Delta}{4a}$, como a função não possui zeros, ou seja, Δ<0 esse seu valor mínimo será positivo e, portanto $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De maneira análoga, se $a < 0$ a função possui valor máximo $-\frac{\Delta}{4a}$, como a função não possui zeros, ou seja, Δ<0, esse seu valor máximo será negativo e portanto $f(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

No ensino de funções quadráticas é comum o professor construir uma tabela com alguns valores para x, encontrar os valores correspondentes para f(x), marcar esses pontos no plano cartesiano, uni-los seguindo os traços de uma parábola e enunciar: “Vejam esse gráfico representa uma parábola”.

E assim é dada a definição de parábola para o aluno:

“Parábola é o gráfico de uma função quadrática”

Com essa definição o aluno acaba associando a parábola, de forma equivocada, a qualquer gráfico ou figura que possua o formato similar ao dela.

Para evitar confusões desse tipo é importante definir corretamente a parábola e o gráfico de uma função quadrática e mostrar que esses conjuntos são iguais.

Neste capítulo nosso objetivo é explicar o significado matemático da frase: O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Inicialmente apresentaremos as definições de parábola e de gráfico da função quadrática.

Definição 3.1. *Dada uma reta **d** chamada de diretriz e um ponto **F**, que não pertence a reta dada, chamado de foco, chamamos de parábola o conjunto de pontos do plano que equidistam do foco **F** e da diretriz **d**.*

A reta perpendicular à diretriz passando por **F** será chamada de eixo da parábola e o ponto **V**, que é o ponto médio do segmento com extremidades em **F** e na intersecção da diretriz com o eixo da parábola, será chamado de vértice.

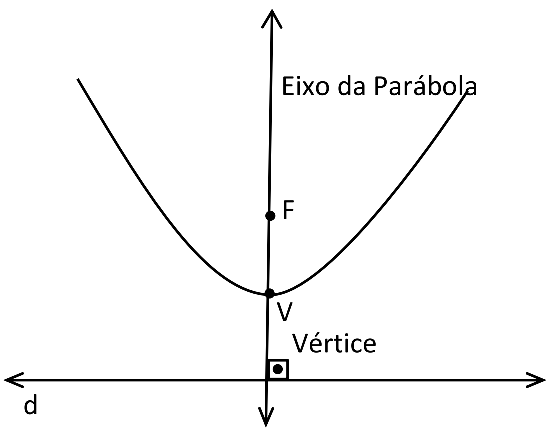

Figura 3.1: Representação do traço gráfico de uma parábola.

Vamos utilizar o *software* GeoGebra de geometria dinâmica para visualizar a construção da parábola passo a passo a partir da definição.

Primeiro passo:

Marcar dois pontos, A e B, no plano para definir a reta diretriz d. Em seguida marcar um ponto que não pertence a reta, esse será nosso foco F, para isso usaremos a ferramenta **Novo Ponto** .

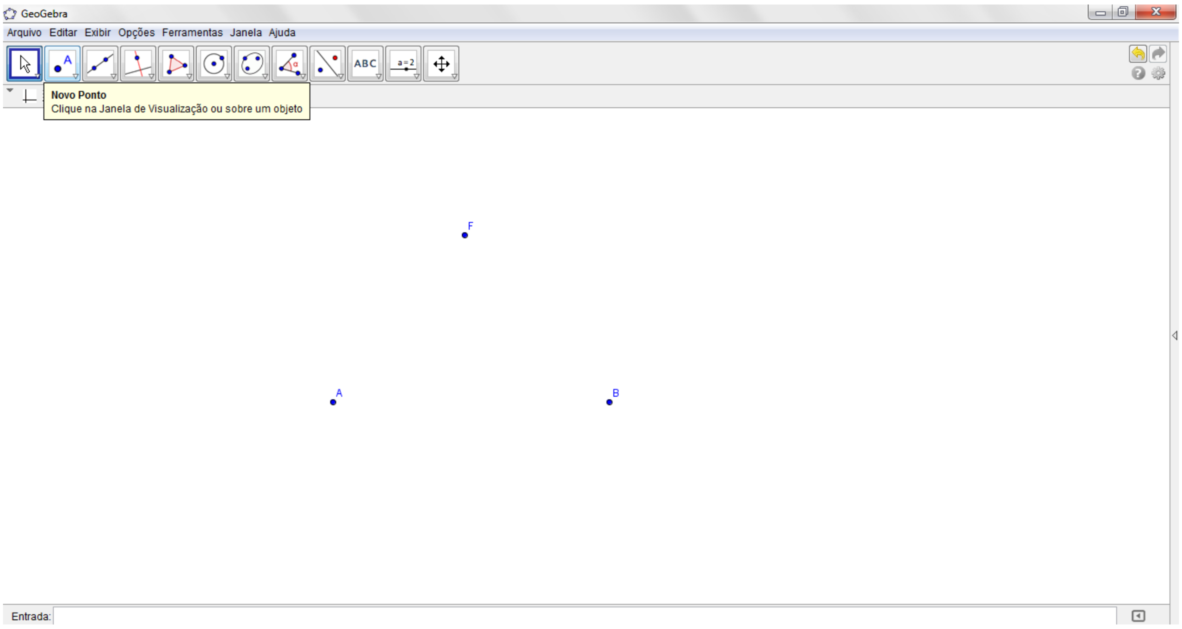

Figura 3.2: Representação de pontos utilizando o *software* GeoGebra.

Segundo passo:

Usando a ferramenta **Reta definida por Dois Pontos**  e selecionando os pontos A e B construímos a reta diretriz d.

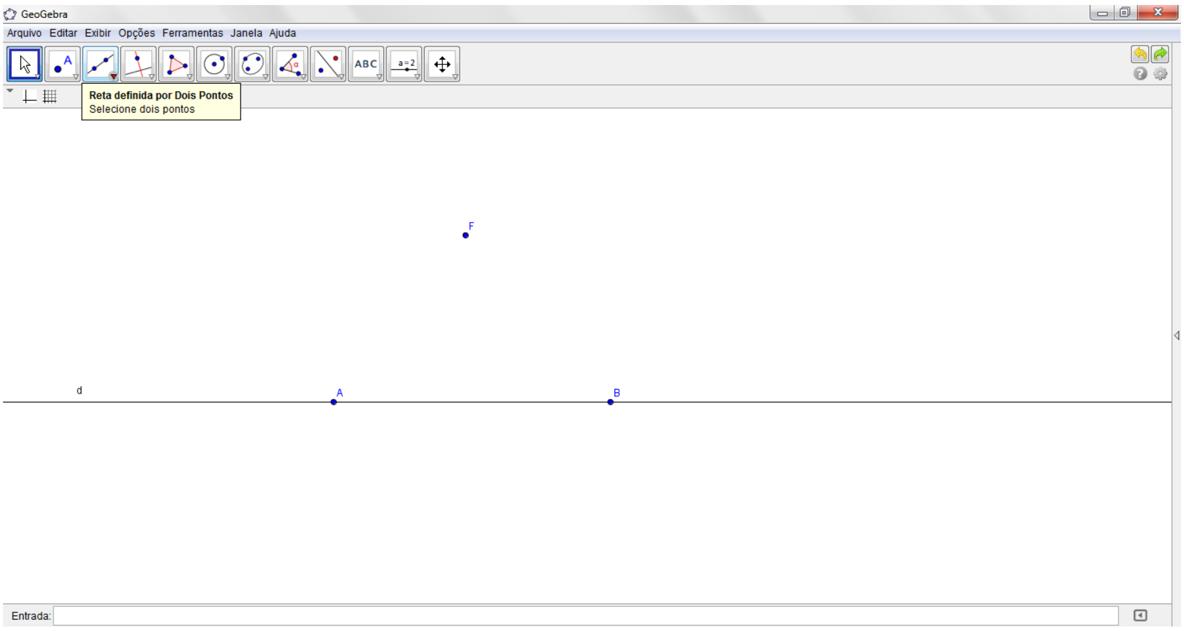

Figura 3.3: Construção de uma reta passando por dois pontos utilizando o software GeoGebra

Terceiro passo:

Marcar um ponto Q com a ferramenta **Novo Ponto** que pertença a reta d e que se movimenta livremente. Por esse ponto passar uma reta que seja perpendicular a diretriz com a ferramenta **Reta Perpendicular** .

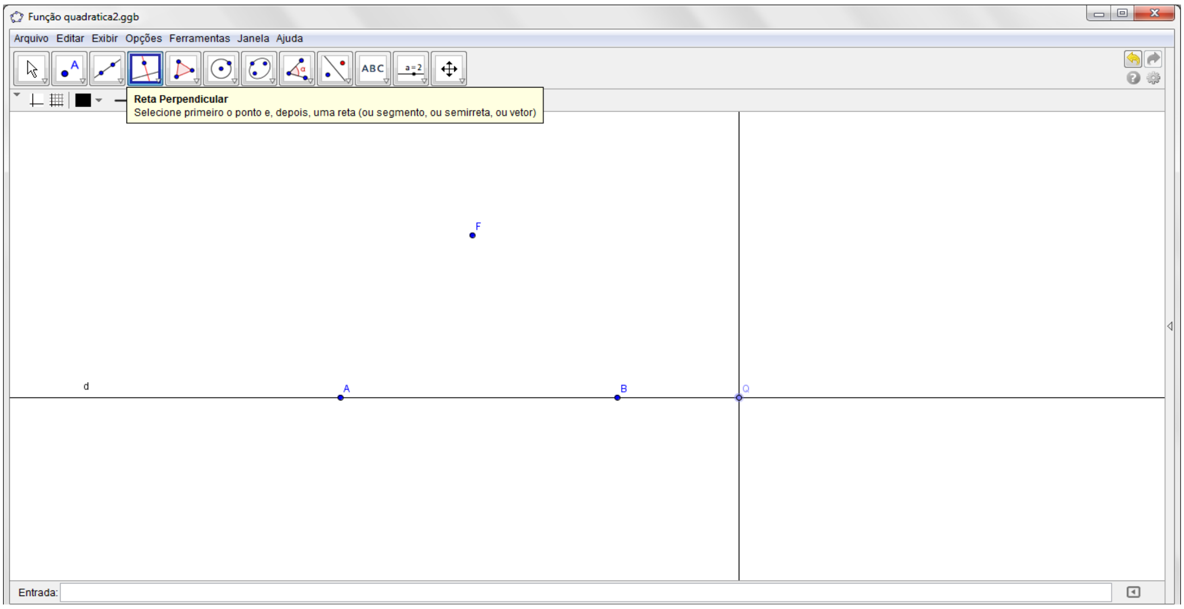

Figura 3.4: Construção de uma reta perpendicular utilizando o software GeoGebra

Quarto passo:

Marcar um ponto que seja equidistante do foco F e da diretriz d. Para isso trace a reta mediatriz com a ferramenta **Mediatriz** entre o foco F e o ponto Q. Utilizando a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos** encontramos o ponto P procurado.

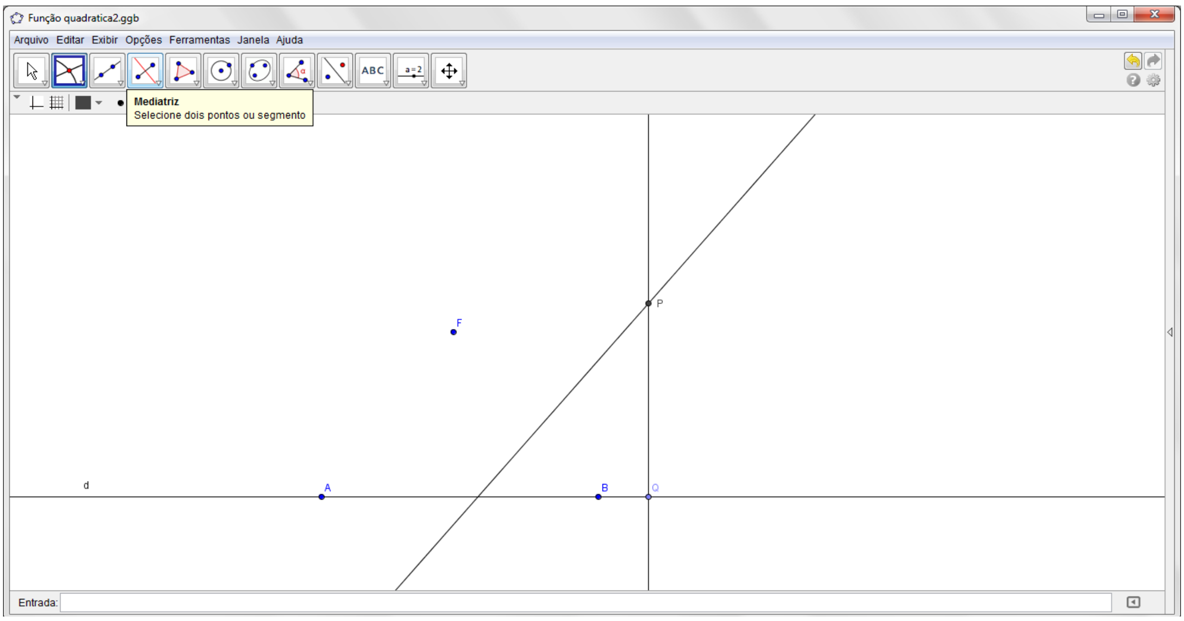

Figura 3.5: Construção de uma mediatriz utilizando o *software* GeoGebra.

Quinto passo:

Ao movimentar o ponto Q percebemos que o ponto P percorre um caminho mantendo a propriedade de ser equidistante do ponto F e da reta diretriz d. Esse conjunto de pontos é o que chamamos de parábola.

Daí, temos duas opções a fazer:

1ª) Usar a ferramenta **Habilitar Rastro** que pode ser ativada clicando com o botão direito do mouse.

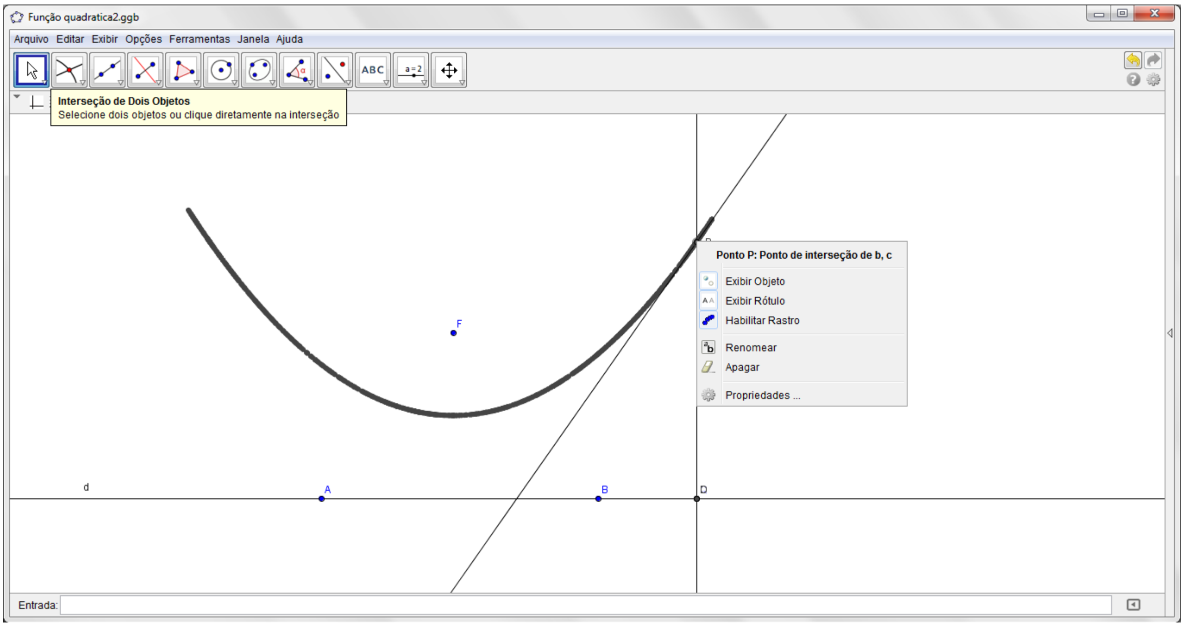

Figura 3.6: Representação gráfica do traço de uma parábola utilizando o *software* GeoGebra.

2ª) Usar a ferramenta **Lugar Geométrico** .

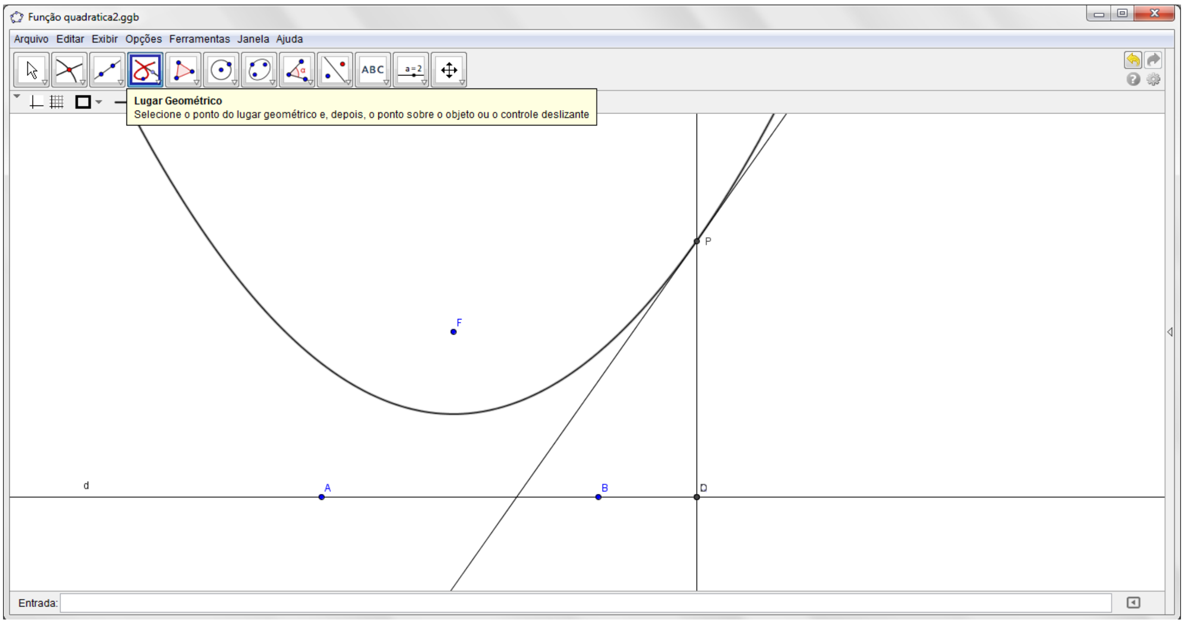

Figura 3.7: Representação gráfica do traço de uma parábola utilizando o software GeoGebra.

Se quisermos visualizá-la sem os objetos auxiliares que utilizamos basta clicar com o botão direito e escolher a opção **exibir objeto**.

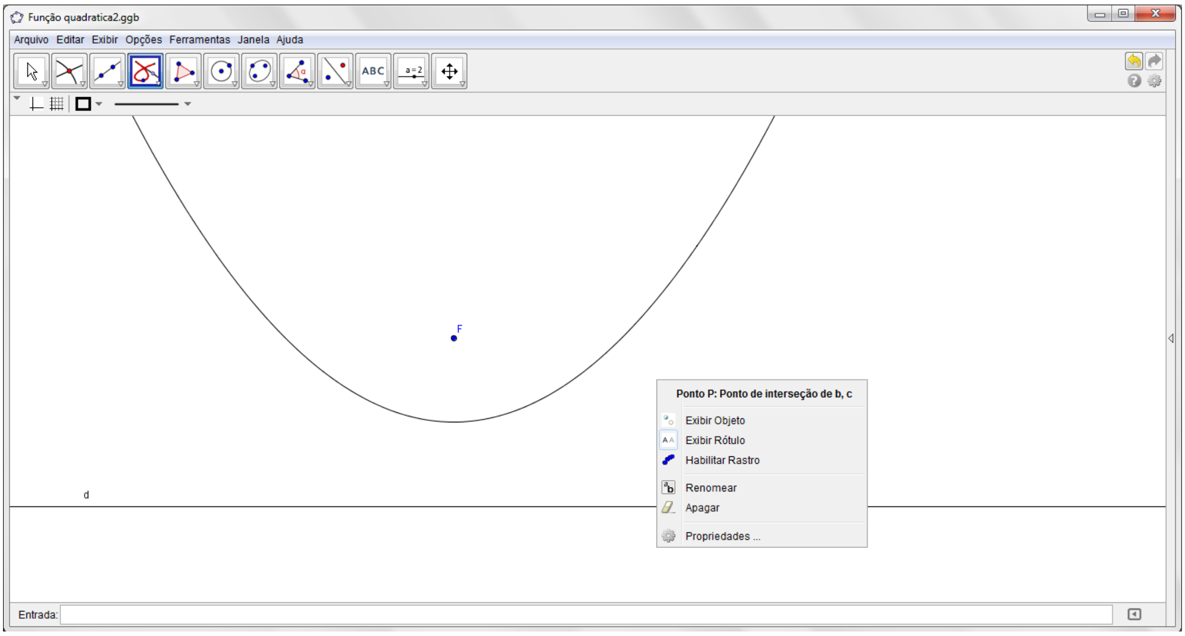

Figura 3.8: Representação gráfica do traço de uma parábola utilizando o *software* GeoGebra.

Definição 3.2. O gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é o conjunto de pares ordenados da forma $(x, f(x))$.

Resumidamente: $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = ax^2 + bx + c\}$.

Estamos trabalhando, portanto, com subconjuntos de pontos do plano. A estratégia será então mostrar que os pontos da parábola cuja diretriz é horizontal pertencem ao gráfico de uma função quadrática e que os pontos do gráfico da função quadrática pertencem a uma parábola.

Começaremos com a função quadrática mais simples $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ e em seguida usando translações horizontais e verticais obteremos o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

3.1 O Gráfico de $f(x) = ax^2$

O gráfico da função $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$ é a parábola de foco $F(0, \frac{1}{4})$ e diretriz d: $y = -\frac{1}{4a}$.

Vamos considerar o vértice V da parábola coincidindo com a origem do plano cartesiano e o foco sendo o ponto de coordenadas (0, p). Dessa forma a diretriz d será a reta $y = -p$.

Seja P(x, y) um ponto qualquer da parábola. Sabemos pela definição (3.1), que P é equidistante do foco F e da diretriz d, ou seja,

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p \tag{3.1}$$

onde o primeiro membro da equação representa a distância entre os pontos P e F, enquanto o segundo membro representa a distância entre o ponto P e a diretriz d. Conforme a Figura 3.1.

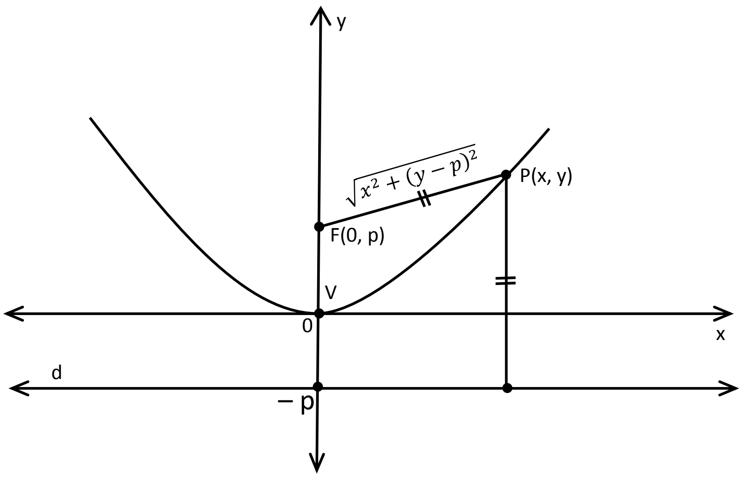

Figura 3.9: Representação da distância entre o foco F e o ponto P.

Elevando ao quadrado os dois lados da equação (3.1), obtemos

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2,$$

que é equivalente a:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2,$$

de onde, segue:

$$4py = x^2,$$

ou ainda:

$$y = \frac{x^2}{4p}.$$

Logo os pontos da parábola de foco $F(0,p)$ e diretriz $d: y = -p$ satisfazem a equação $y = \frac{x^2}{4p}$, ou seja, pertencem ao gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ com $a = \frac{1}{4p}$.

Agora vamos mostrar que os pontos do gráfico da função $f(x) = ax^2$ pertencem a parábola de foco $F(0, \frac{1}{4a})$ e diretriz $d: y = -\frac{1}{4a}$.

Seja $P(x, ax^2)$ um ponto do gráfico da função f. A distância entre P e F é dada por

$$\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}.$$

Note que:

$$\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}}$$

$$= \sqrt{a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|$$

Que nada mais é do que a distância entre P e a diretriz. Como a igualdade é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$, isso mostra que os pontos do gráfico de $f(x) = ax^2$ coincidem com os da parábola de foco $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e de diretriz $d: y = -\frac{1}{4a}$.

Definição 3.3. *Considere uma função* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $y_0 \in \mathbb{R}$. *Se aplicarmos a translação vertical* $(x, y) \mapsto (x, y + y_0)$ *a qual leva o eixo horizontal* $y = 0$ *na reta horizontal* $y = y_0$, *o gráfico da nova função é obtido a partir do gráfico da função g, deslocando-o verticalmente* y_0 unidades acima ou abaixo, conforme $y_0 > 0$ ou $y_0 < 0$.

Definição 3.4. Considere uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Se aplicarmos a translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + x_0, y)$ a qual leva o eixo vertical $x = 0$ na reta vertical $x = x_0$, então o gráfico da nova função é obtido a partir do gráfico da função g, deslocando-o horizontalmente x_0 unidades, para a direita ou para esquerda, conforme $x_0 > 0$ ou $x_0 < 0$.

3.2 O Gráfico de $f(x) = ax^2 + y_0$

O gráfico da função $f(x) = ax^2 + y_0$, onde $a, y_0 \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma parábola de foco $F(0, y_0 + \frac{1}{4a})$ e diretriz $y = y_0 - \frac{1}{4a}$.

Com efeito, observe que o gráfico da função $f(x) = ax^2 + y_0$ resulta do gráfico da função $g(x) = ax^2$ pela translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y + y_0)$ a qual leva o eixo OX na reta $y = y_0$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = y_0 - \frac{1}{4a}$.

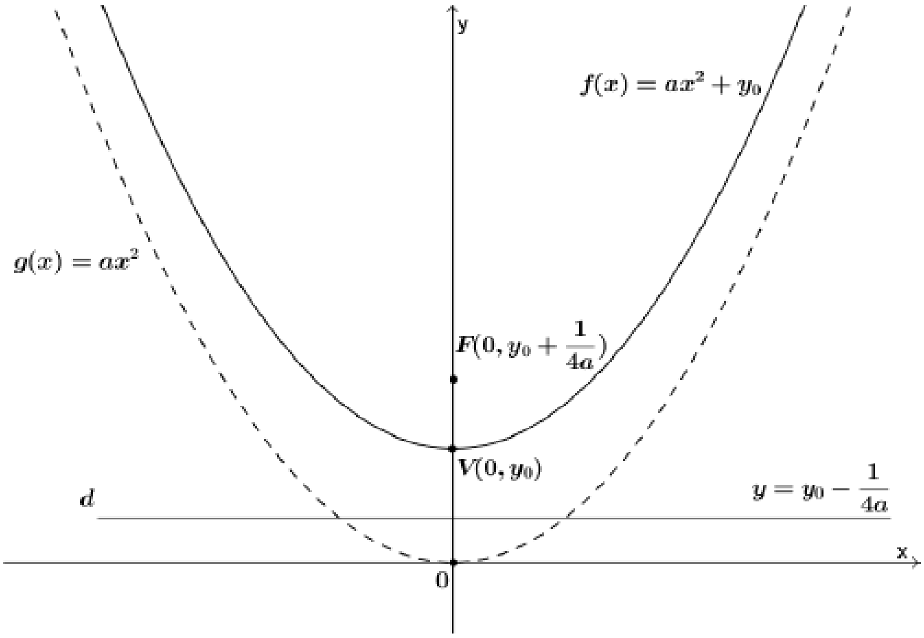

Figura 3.10: Translação vertical da parábola g(x) = ax².

3.3 O Gráfico de $f(x) = a(x - x_0)^2$

O gráfico da função $f(x) = a(x - x_0)^2$, onde $a, x_0 \in \mathbb{R}$ e $a \in 0$ é uma parábola de foco $F(x_0, \frac{1}{4a})$ e diretriz $y = -\frac{1}{4a}$.

De fato, observe que o gráfico da função $f(x) = a(x - x_0)^2$ resulta do gráfico da função $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + x_0, y)$ a qual leva, por exemplo, o ponto $(0, 0)$ no ponto $(x_0, 0)$ e de maneira mais geral o eixo vertical $x = 0$ na reta vertical $x = x_0$.

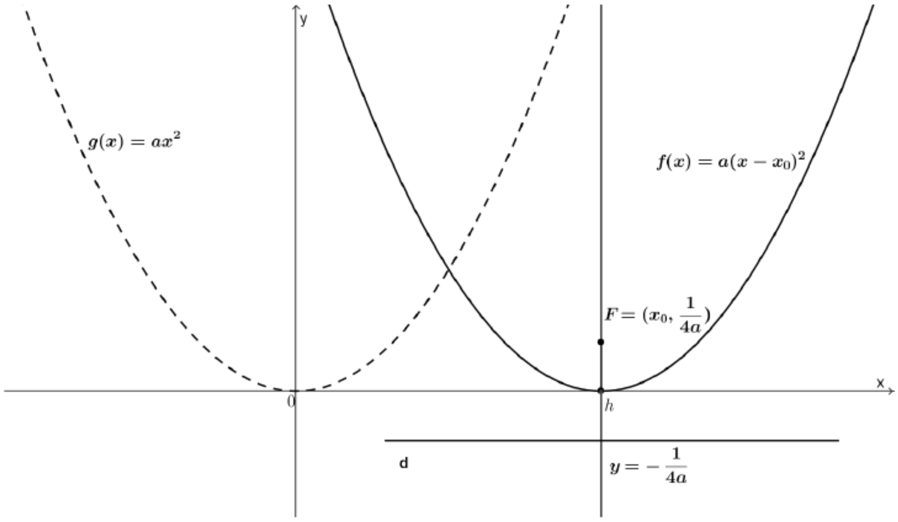

Figura 3.11: Translação horizontal da parábola g(x) = ax².

3.4 O Gráfico de $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$

Ao transladarmos horizontalmente e verticalmente a função $g(x) = ax^2$, teremos a função $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$, que possui foco $F(x_0, y_0 + \frac{1}{4a})$ e diretriz $y = y_0 - \frac{1}{4a}$, visto que o foco da função g deslocou-se x_0 unidades horizontalmente e y_0 unidades verticalmente, enquanto a diretriz, que não sofre deslocamento horizontal, se deslocou y_0 unidades verticalmente.

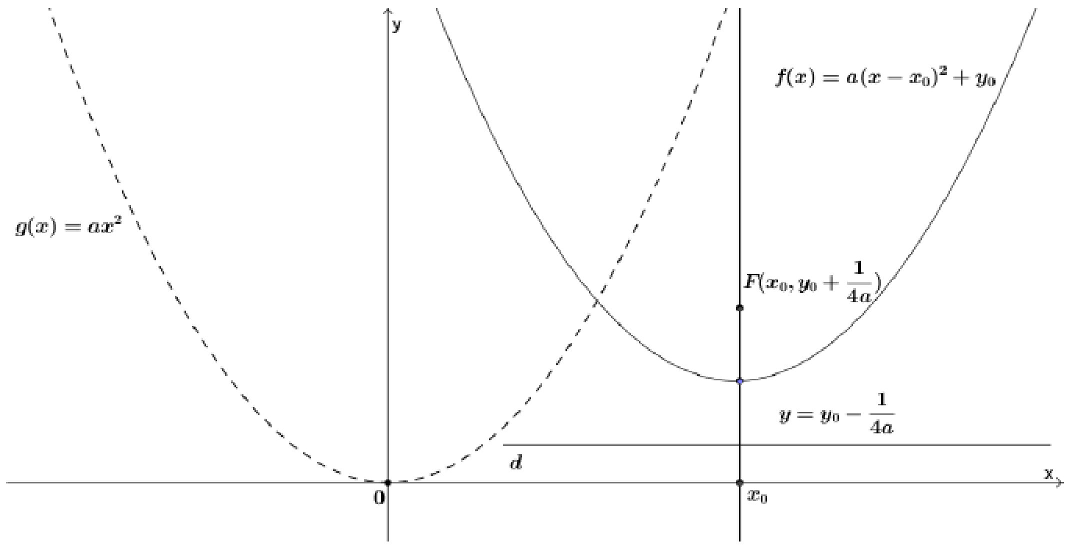

Figura 3.12: Translação horizontal e vertical da parábola g(x) = ax².

Note que a função quadrática transladada horizontalmente x_0 unidades e verticalmente y_0 unidades, nada mais é do que a função quadrática escrita em sua forma canônica (2.2). Como toda função quadrática pode ser escrita como a equação (2.2), logo o gráfico de qualquer função quadrática é uma parábola.

Vemos assim que a forma canônica facilita o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Basta tomar uma função do tipo $f(x) = ax^2$ e a partir dela realizar as translações necessárias, que ficam evidentes estando f em sua forma canônica.

Exemplo 3.1. *Construir o gráfico de cada uma das funções que seguem:*

a) $f(x) = x^2 - 2x + \ 1$

Escrevendo a função em sua forma canônica $f(x) = (x-1)^2$. Aplicando a translação horizontal $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ na função $f_1(x) = x^2$ obtemos o gráfico da função $f(x) = (x-1)^2$.

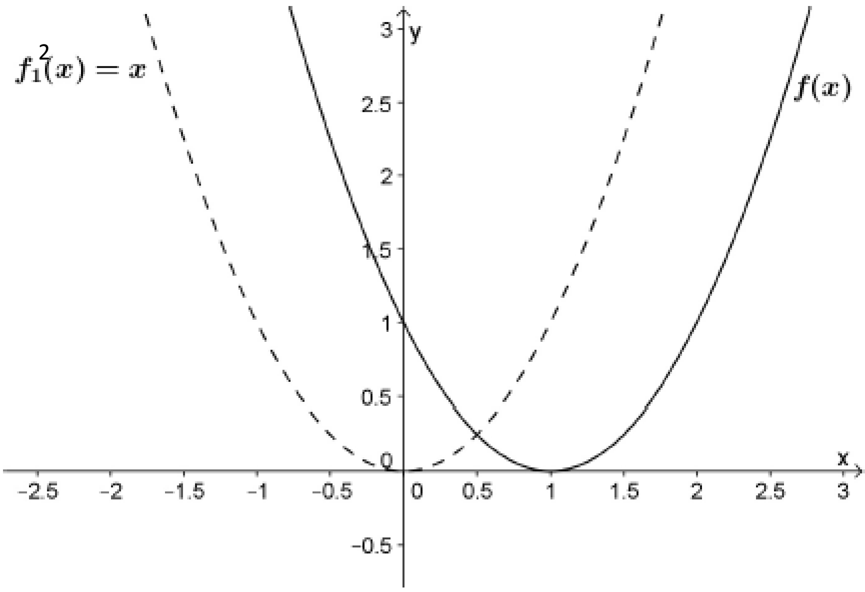

Figura 3.13: Translação horizontal da parábola $f_1(x) = x^2$.

b) $g(x) = -2x^2 + 5x - 8$

Escrevendo a função em sua forma canônica $g(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{39}{8}\cdot$ A partir da função $g_1(x) = -2x^2$, aplicamos a translação horizontal $(x, y) \mapsto \left(x + \frac{5}{4}, y\right)$ e a translação vertical $(x, y) \mapsto \left(x, y - \frac{39}{8}\right)$, obtendo o gráfico da função $g(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{39}{8}$.

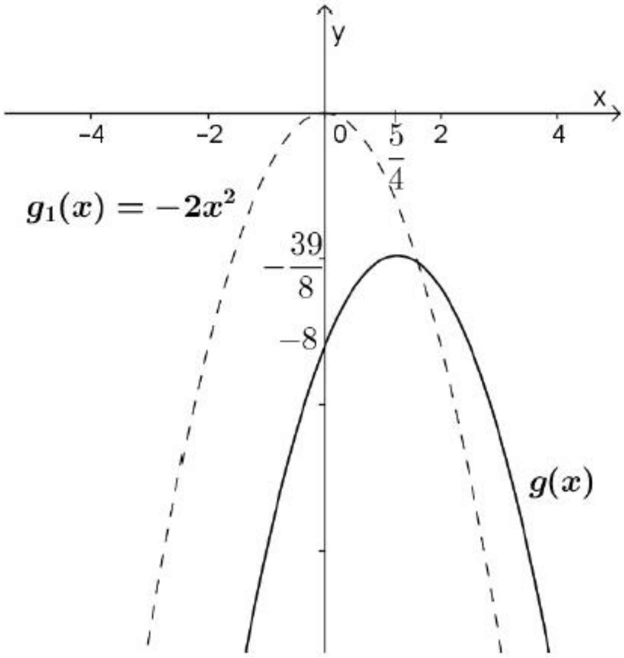

Figura 3.14: Translação vertical da parábola $g_1(x) = -2x^2$.

$c)\ h(x) = x^2 - 8x + 12$

Escrevendo a função na forma canônica $h(x) = (x - 4)^2 - 4$. A partir da função $h_1(x) = x^2$ aplicamos a translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + 4, y)$ e a translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y - 4)$, obtendo o gráfico da função $h(x) = (x - 4)^2 - 4$.

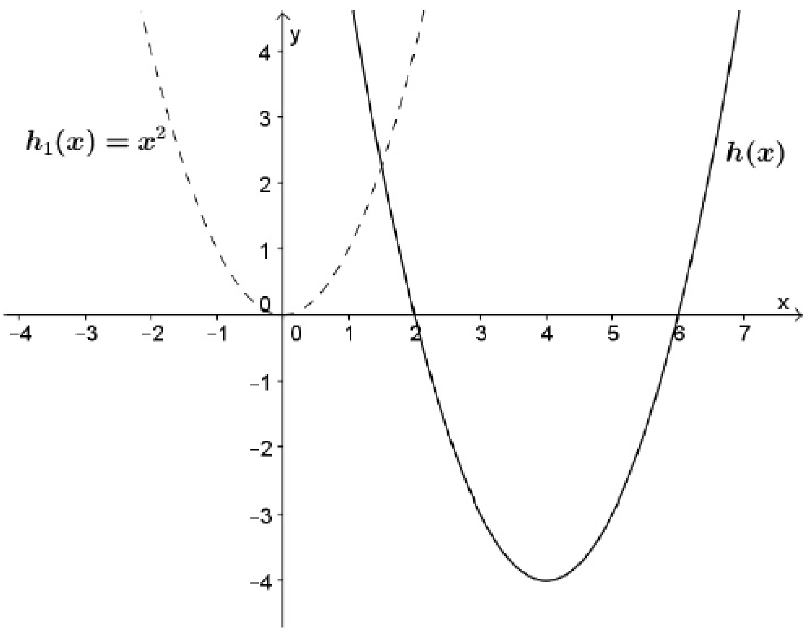

Figura 3.15: Translação vertical e horizontal da parábola $h_1(x) = x^2$.

4 ESTUDO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Conhecido o gráfico, ou seja, tendo a parábola, podemos extrair várias informações a respeito da função, como, por exemplo, o estudo dos zeros e do sinal da função, feitos de maneira algébrica nas Seções 2.1 e 2.2, respectivamente.

Encerramos o nosso estudo com a Seção 4.3 onde mostramos que a parábola é simétrica em relação a reta $x = -\frac{b}{2a}\cdot$

4.1 Zeros da Função

No que diz respeito aos zeros temos:

- O gráfico toca o eixo das abscissas em dois ponto distintos, quando a função possui zeros diferentes. Assim como no Exemplo 2.3. item a;

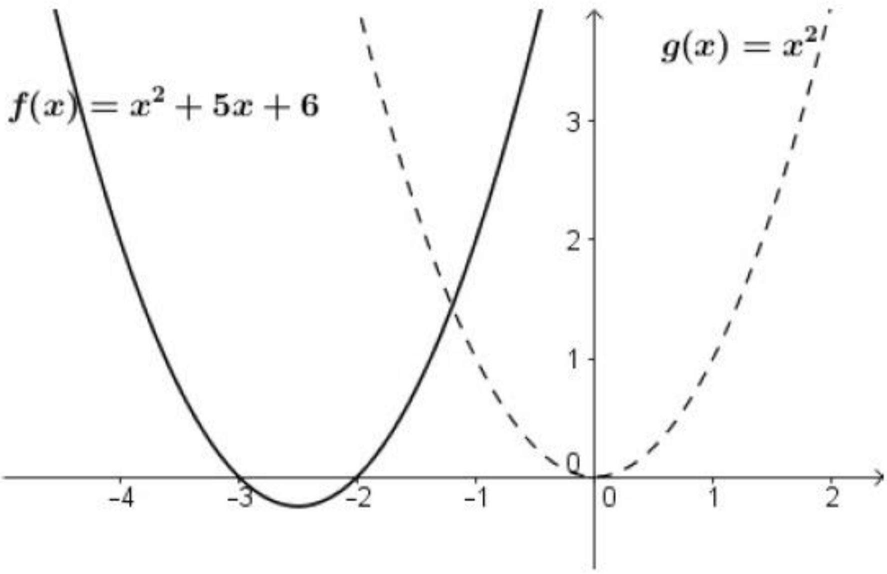

Figura 4.1: Translação horizontal e vertical da parábola $g(x) = x^2$.

- O gráfico toca o eixo x num único ponto, quando a função possui zeros iguais. Assim como no Exemplo 2.3. item c;

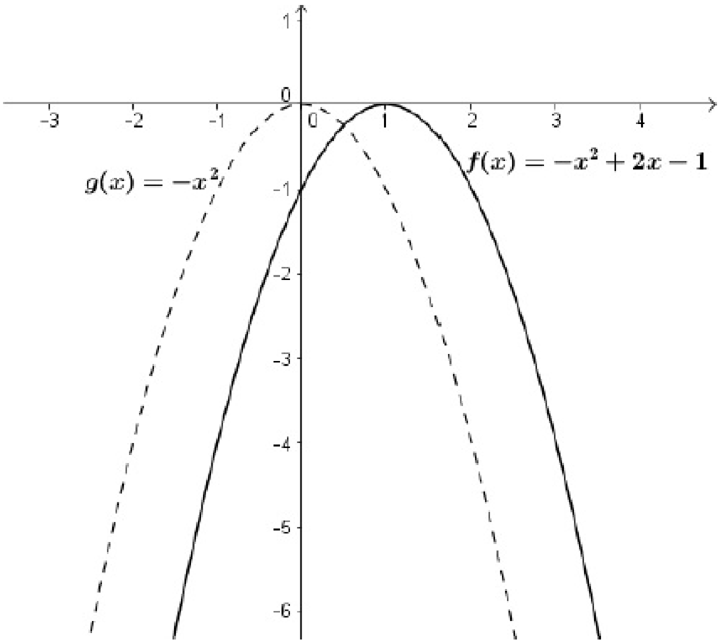

Figura 4.2: Translação horizontal da parábola $g(x) = x^2$.

- Se a função não possui zeros reais, então o gráfico não toca o eixo das abscissas. Como no Exemplo 2.3. item b.

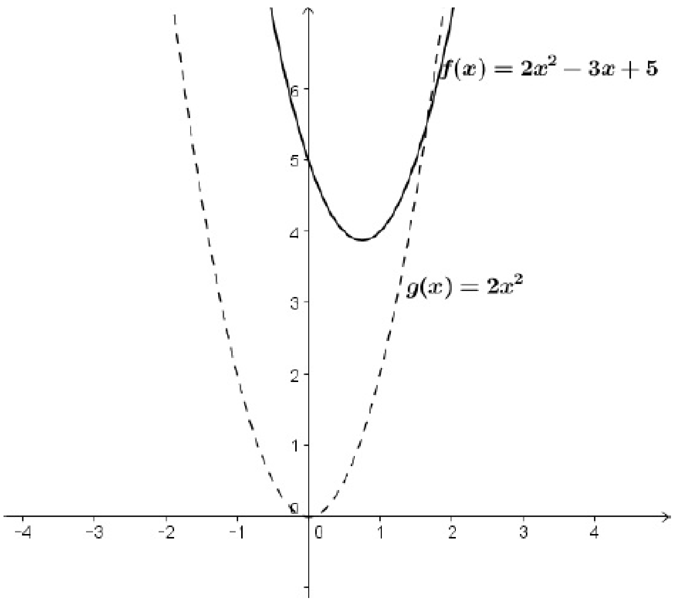

Figura 4.3: Translação horizontal e vertical da parábola $g(x) = 2x^2$.

4.2 Estudo do Sinal

Já estudamos os sinais da função de uma maneira algébrica a partir da forma fatorada, agora faremos esse estudo observando o gráfico.

Ao esboçar o gráfico da função temos alguns casos a analisar, conforme $a > 0$ ou $a < 0$.

Se $a > 0$ a função possui um valor mínimo e, portanto, a concavidade (abertura) da parábola é voltada para cima. Temos três casos para analisar:

1º) A parábola não toca o eixo x, ou seja, $\Delta < 0$ e dessa forma a função só assume valores positivos para todo $x \in \mathbb{R}$.

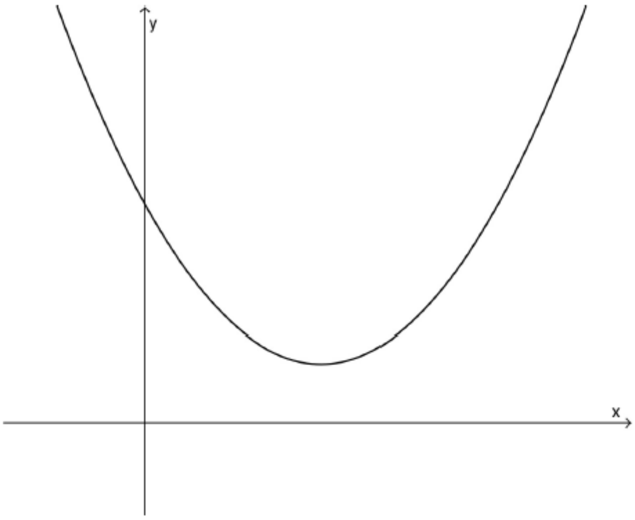

Figura 4.4: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta < 0$.

2º) A parábola toca no eixo x em apenas um ponto, isto é, $\Delta = 0$, neste caso a função será zero quando x for raiz da equação e será positiva para qualquer outro valor de x.

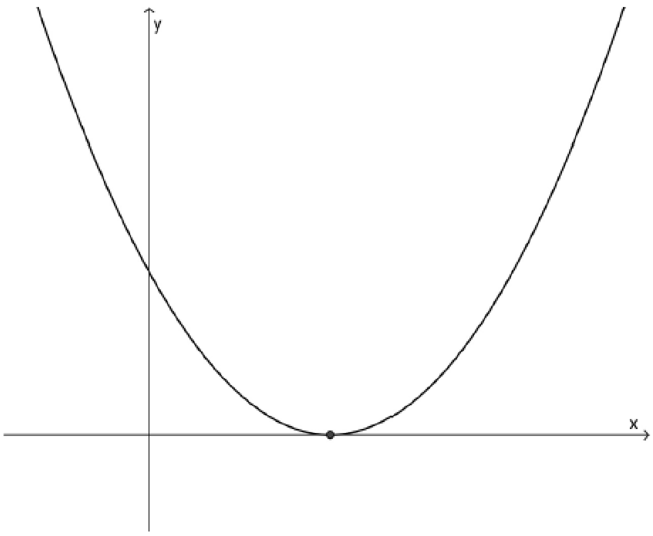

Figura 4.5: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta = 0$.

3º) A parábola corta o eixo x em dois pontos distintos, ou seja, $\Delta > 0$. Este é o caso mais interessante a ser considerado, pois requer uma análise mais detalhada a respeito do gráfico. Como $\Delta > 0$ a função possui dois zeros reais diferentes. Considerando que α e β são os zeros da função e que $\alpha < \beta$, a função será positiva quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$ e será negativa quando $\alpha < x < \beta$.

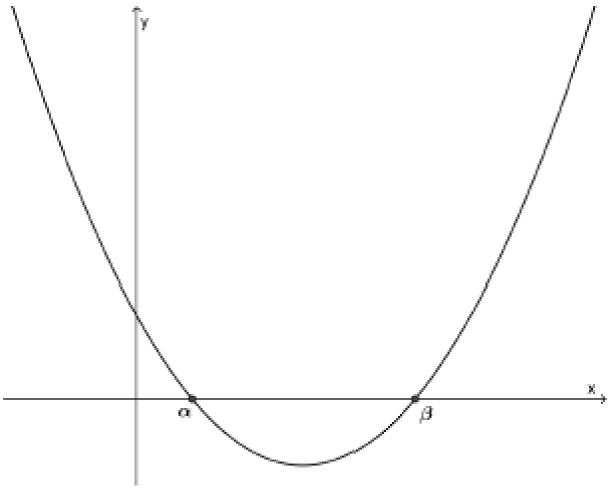

Figura 4.6: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta > 0$.

Se $a < 0$ a função possui um valor máximo e, portanto, a concavidade (abertura) da parábola é voltada para baixo. Temos três casos para analisar:

1º) A parábola não toca no eixo x, ou seja, $\Delta < 0$ e dessa forma a função só assume valores negativos para todo $x \in \mathbb{R}$.

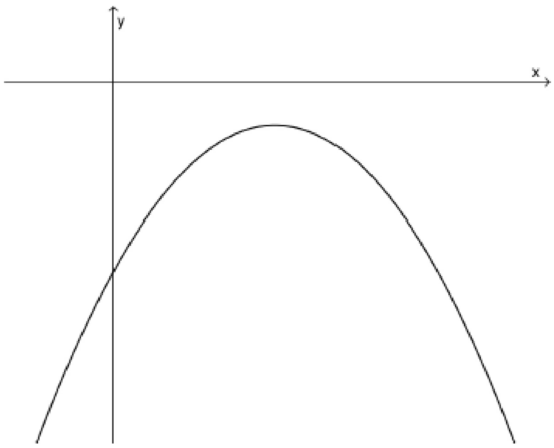

Figura 4.7: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta < 0$.

2º) A parábola toca no eixo x em um único ponto, isto é, $\Delta = 0$, neste caso a função é zero quando x for raiz da equação e será negativa para qualquer outro valor de x.

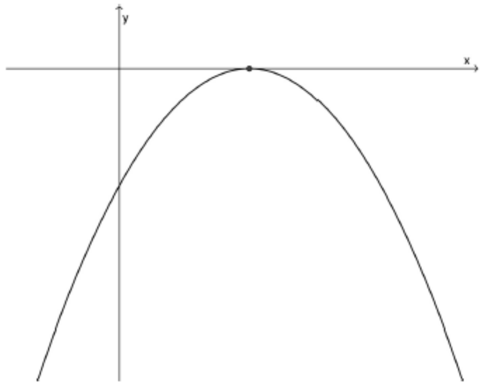

Figura 4.8: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta = 0$.

3º) Por fim o caso mais interessante, quando a parábola corta o eixo x em dois pontos distintos, ou seja, $\Delta > 0$. Consequentemente a função possui dois zeros reais e diferentes, digamos α e β, com $\alpha < \beta$, então a função será positiva quando $\alpha < x < \beta$ e será negativa quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$.

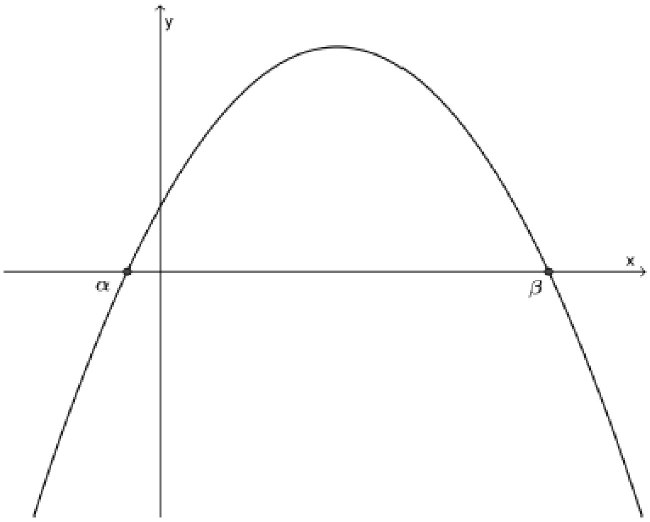

Figura 4.9: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta > 0$.

Exemplo 4.1. *Estudar os sinais das funções:*

a) $f(x) = x^2 - 8x + 15$. Escrevendo a função na forma canônica temos:

$$f(x) = (x-4)^2 - 1.$$

Esboçando o gráfico:

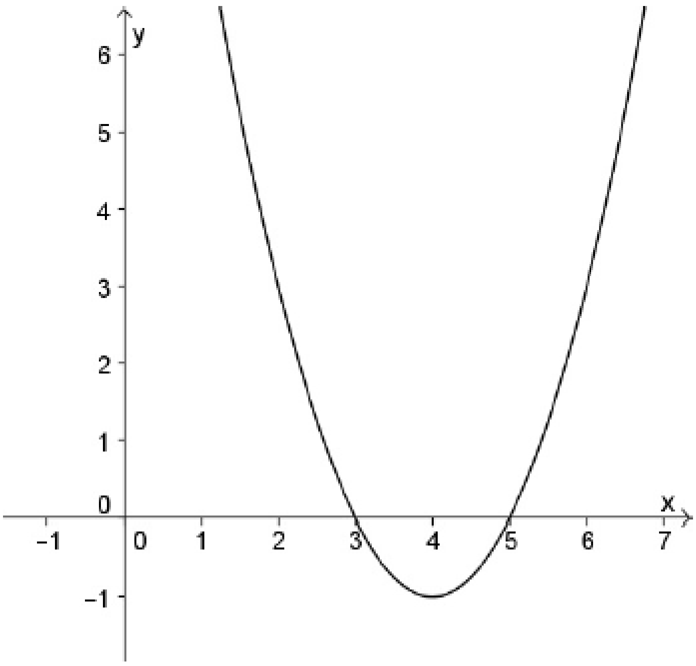

Figura 4.10: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta > 0$.

Assim, para $3 < x < 5$, $f(x) < 0$ e para $x < 3$ ou $x > 5$, $f(x) > 0$.

b) $f(x) = -2x^2 + 6x - 9$. Escrevendo a função na forma canônica temos:

$$f(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

Esboçando o gráfico:

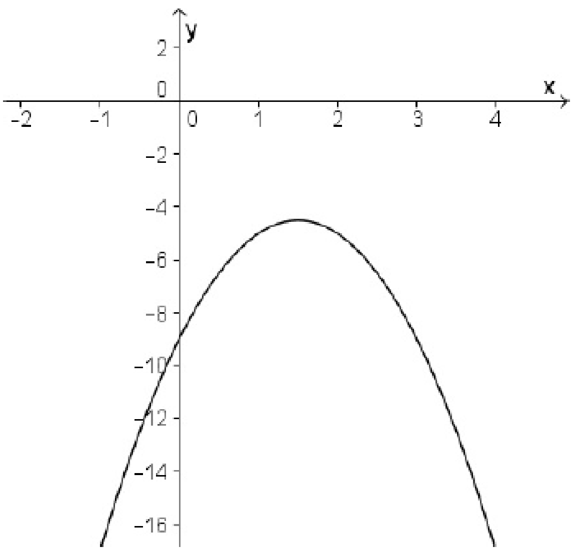

Figura 4.11: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta < 0$.

A função é sempre negativa para todo $x \in \mathbb{R}$.

4.3 Eixo de Simetria da Função Quadrática

Ao verificar o gráfico de uma função quadrática, observamos que há uma certa simetria em seu formato. Mostraremos que $f(x_1) = f(x_2)$ se, e somente se, os pontos x_1 e x_2 são simétricos em relação a reta vertical $-\frac{b}{2a}$, ou seja, $\frac{(x_1+x_2)}{2} = -\frac{b}{2a}$ para todo x_1 e x_2 reais. Isto significa que a reta $-\frac{b}{2a}$ é o eixo de simetria da parábola.

Demonstração: Se $f(x_1) = f(x_2)$, então $\frac{(x_1+x_2)}{2} = -\frac{b}{2a}$

De fato, sejam x_1 e x_2 reais com $x_1 \neq x_2$ e tais que $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja,

$$ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c$$

agrupando os termos de maneira conveniente:

$$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0,$$

e fatorando a diferença $(x_1^2 - x_2^2)$ ficamos com:

$$(x_1 - x_2)[a(x_1 + x_2) + b] = 0,$$

como estamos supondo $x_1 \neq x_2$, então

$$a(x_1 + x_2) + b = 0,$$

ou seja,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a},$$

mostraremos agora que se $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, então $f(x_1) = f(x_2)$.

Com efeito, da forma canônica (2.2), temos que $f(x) = (x - x_0)^2 + y_0$, onde $x_0 = -\frac{b}{2a}$ assim:

$$f(x_1) = \left[x_1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right]^2 + y_0$$
$$= \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + y_0$$
$$= \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} + y_0$$
$$= \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + y_0$$
$$= \left[x_2 - \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\right]^2 + y_0$$

mas,

$$\left[x_2 - \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\right]^2 + y_0 = f(x_2),$$

logo,

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Isso significa que todos os pontos x_1 e x_2 distintos, tais que $f(x_1) = f(x_2)$, são simétricos em relação a reta vertical $x = -\frac{b}{2a} \cdot$ Essa reta vertical é chamada de eixo de simetria da parábola.

Vimos no capítulo 3 que o vértice da parábola é o ponto mais próximo da diretriz, ou seja, sua coordenada x coincide com a, do ponto que maximiza ou minimiza a função (dependendo do sinal de a) $x = -\frac{b}{2a}$, desse modo o vértice pertence ao eixo de simetria da parábola.

Exemplo 4.2. *Considere uma função quadrática f em que as coordenadas do vértice são* $(4, -2)$ *e um de seus zeros é 5. Determine o valor do outro zero dessa função.*

Solução: Como a função quadrática possui a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ como eixo de simetria, então os seus zeros possuem a mesma distância para a coordenada x do vértice, portanto se um dos zeros é 5 o outro é 3.

No próximo Capítulo mostraremos a construção do foguete de garrafa pet e a construção da base de lançamento.

5 CONSTRUINDO FOGUETES DE GARRAFA PET

Os foguetes são máquinas incríveis e cheias de tecnologia. São usados para lançar ao espaço homens, satélites e naves para exploração espacial. Pela sua complexidade, esse tema não é muito tratado em sala de aula e funciona mais como tema transversal, apesar de ser um assunto bastante atrativo e que pode ser abordado de maneira simples e interdisciplinar no currículo escolar. A construção pode parecer muito complicada, mas existem várias formas de se construir e lançar foguetes.

Neste trabalho, apresentar-se-á uma das formas mais práticas, simplificada ao máximo, a fim de tornar possível a sua construção por pessoas menos habilidosas. Esse tipo de foguete é bastante simples de construir e utiliza materiais muito fáceis de serem encontrados. Apesar disso, tal foguete envolve alguns conceitos físicos importantes e, portanto, sua construção deve seguir a risca certos princípios que tratam basicamente de sua estabilidade em voo e segurança para quem vai lançá-lo.

5.1 Materiais para Construção do Foguete

- Duas garrafas pet cilíndricas de dois litros com paredes paralelas;
- Estilete;
- Régua;
- Lápis marcador;
- Fita adesiva;
- Papelão, cartolina ou isopor de alta densidade;
- Tesoura.

5.2 Procedimento para Montagem do Foguete

Corte a parte superior de uma das garrafas, pois esta parte será o bico (coifa) do foguete. Cole-a com fita adesiva na parte inferior da outra garrafa. Da garrafa que foi cortada, retire da parte central uma tira de 10 cm de largura que será utilizada para fazer a “saia” do foguete. A seguir, corte quatro retângulos de 12 cm por 10 cm conforme a Figura 5.1.

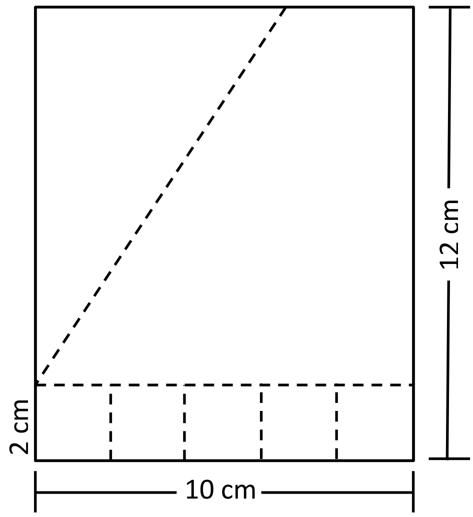

Figura 5.1: Molde para as aletas do foguete.

Fixe com fita adesiva as quatro aletas na fuselagem do foguete. Esse tipo de aleta foi desenhado para que se tenha um encaixe perfeito.

Se os passos anteriores foram seguidos corretamente o foguete estará pronto.

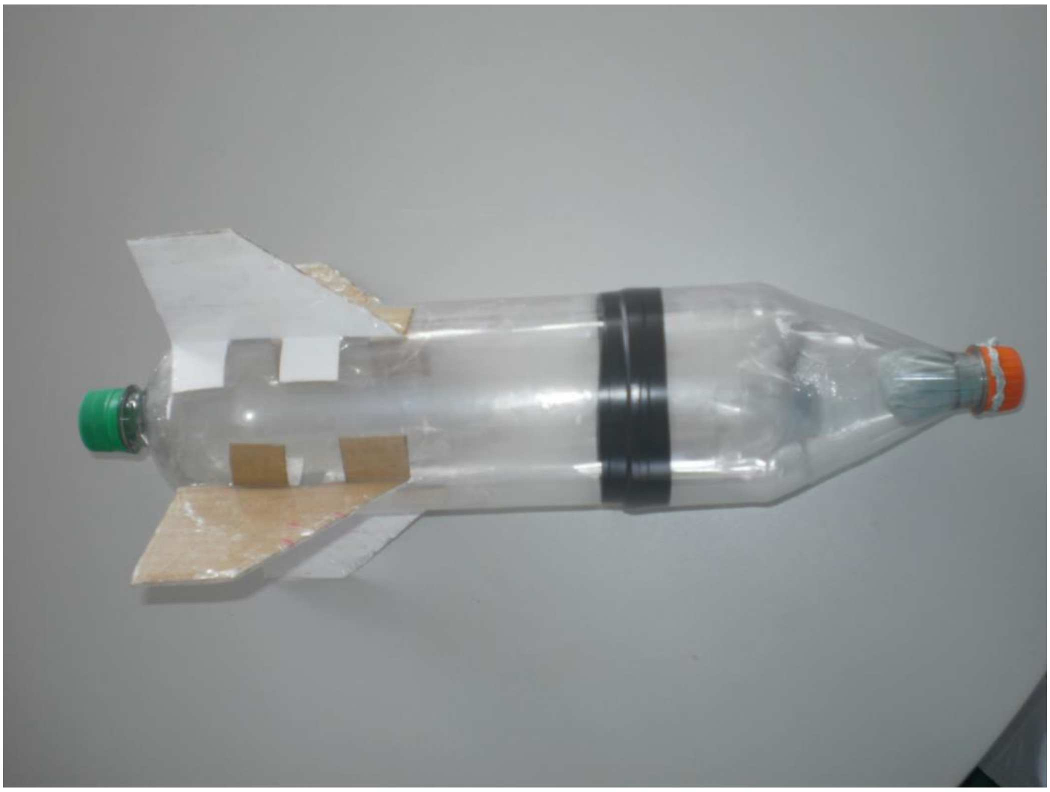

Figura 5.2: Foguete montado.

Este é um modelo de construção extremamente simples. Existem várias outras formas de se construir um foguete PET, assim, vale a criatividade do construtor em substituir e/ou acrescentar alguns materiais. Vale ressaltar ainda que, a garrafa PET não deve ser substituída, uma vez que, esta suporta uma pressão em torno de 40 libras por litro em seu interior, fato extremamente importante para a segurança no lançamento.

5.3 Construindo a Base de Lançamento

A base para lançar foguetes PET deve ser construída com cuidado e ser bastante firme, uma vez que, deverá suportar o peso do foguete carregado. Existem vários formatos de bases de lançamento e os dois principais detalhes a se considerar para o pleno funcionamento são: gatilho de disparo e vazamentos.

O gatilho de disparo deve ser feito de modo a segurar e manter o foguete na posição desejada até o momento de ser disparado. Ele também deve evitar vazamentos, que provoca perda de eficiência do foguete. O modelo de base a seguir é um modelo bastante simples e muito eficiente.

Figura 5.3: Base de lançamento de foguete.

5.4 Materiais para Construção da Base de Lançamento

Figura 5.4: Material para construção da base de lançamento.

A) Quatro “T’s” de ¾’’;

B) Cinco pedaços de cano de ¾’’ medindo 10 cm cada;

C) Quatro joelhos de 90º de ¾’’;

D) Nove pedaços de cano de ¾’’ medindo 15 cm cada;

E) Uma válvula (pito) de pneu;

F) Um cap para cano de ¾’’;

G) Uma luva para cano de ¾’’;

H) Um registro para cano de ¾’’

I) Fita veda rosca;
J) Uma abraçadeira de aço para cano de ¾'';
K) Dez abraçadeiras flexíveis de nylon;
L) Um pedaço de cano de 40 mm para o gatilho;
M) Cola para cano soldável.
N) Uma lixa;
O) Uma serra;
P) Uma régua;
Q) Uma redução de cano de ¾'' para ½";
R) Um pedaço de cano de ½" medindo 30 cm.

5.5 Procedimentos para Montagem da Base de Lançamento

Começaremos a montagem da base pelas pernas: Cole um pedaço de cano de 10 cm em um joelho e na outra extremidade do joelho cole um pedaço de cano de 15 cm, na outra extremidade do cano de 15 cm cole um "T", seguido de mais um pedaço de cano de 15 cm, na extremidade do cano de 15 cm cole um joelho e para finalizar a primeira perna cole um pedaço de cano de 10 cm.

Figura 5.5: Perna da base de lançamento dos foguetes.

Os canos depois de colados devem ficar de acordo com a Figura 5.6.

Figura 5.6: Perna da base de lançamento dos foguetes.

Repita o processo para construção da outra perna.

Para que possamos unir as duas pernas, seguiremos os seguintes procedimentos: Em uma das pernas, colaremos no “T” que ficou no centro um cano de 15 cm, seguido por um “T” e um cano de 15 cm para unir com a outra perna.

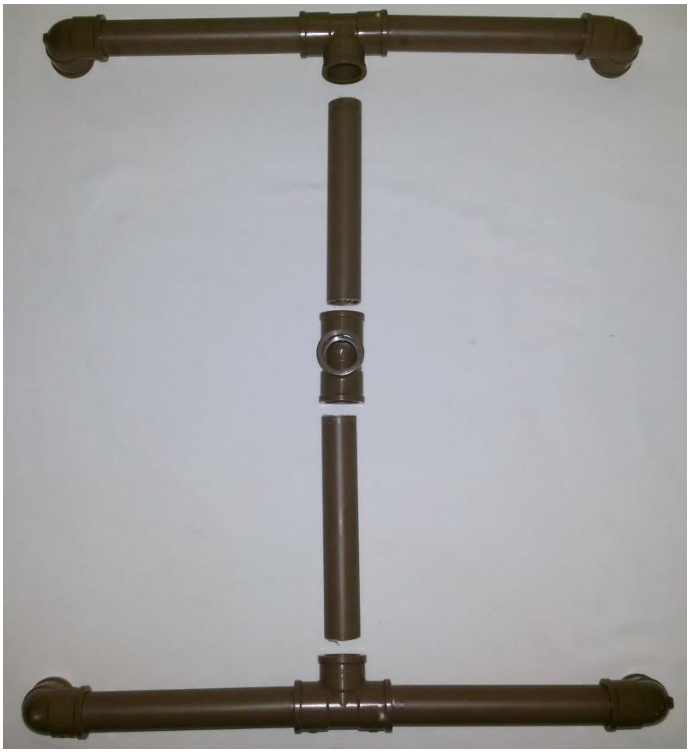

Figura 5.7: Parte central da perna para base de lançamento dos foguetes.

Os canos depois de colados devem ficar como nas Figuras 5.8 e 5.9.

Figura 5.8: Parte central da perna para base de lançamento dos foguetes.

Figura 5.9: Parte central da perna para base de lançamento dos foguetes.

Para montagem do módulo responsável pela entrada de ar e consequente pressurização da garrafa e do dispositivo para abortar o lançamento seguiremos os seguintes procedimentos: cole um pedaço de cano de 10 cm no registro e na outra saída do registro um cano de 15 cm, seguido por um “T”, nas duas saídas do “T” cole pedaços de cano de 15 cm. Na extremidade do cano que ficou perpendicular aos outros canos, cole o CAP já perfurado e acoplado com a válvula de pneu (pito). No outro cano, cole a luva com a redução e o cano de ½” de 30 cm de comprimento.

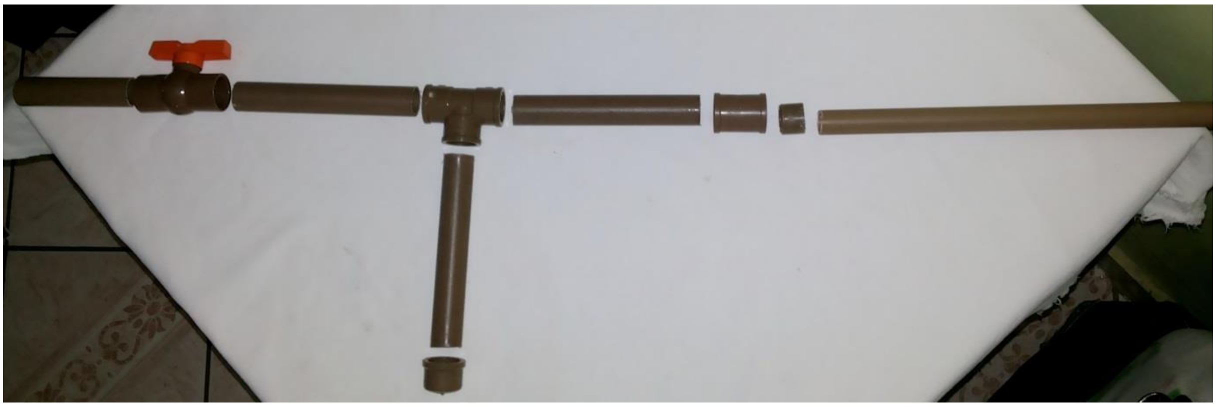

Figura 5.10: Montagem do sistema de propulsão para o lançamento de foguetes.

Os canos depois de colados devem ficar como na figura abaixo.

Figura 5.11: Montagem do sistema de propulsão para o lançamento de foguetes.

A montagem do módulo que reterá o foguete quando este estiver abastecido com água e durante a pressurização é de suma importância para o sucesso do lançamento do foguete, pois nele não poderá haver vazamentos. Com o auxílio de um elástico, posicione as abraçadeiras de nylon em volta do cano. Tenha o cuidado de deixar as partes largas para dentro (elas formarão as travas) que não deixarão com que o foguete seja disparado antes de puxar o gatilho. Depois que as abraçadeiras estiverem todas posicionadas prenda-as com uma abraçadeira de aço para que elas não se desloquem. Posicione o foguete já com água para verificar se há vazamentos, se houver vazamentos use a fita veda rosca para engrossar um pouco mais o cano no local onde a garrafa será posicionada. Para completar coloque o pedaço de cano de 40 mm, pois esse será o gatilho e fará com que o foguete permaneça fixo durante a pressurização.

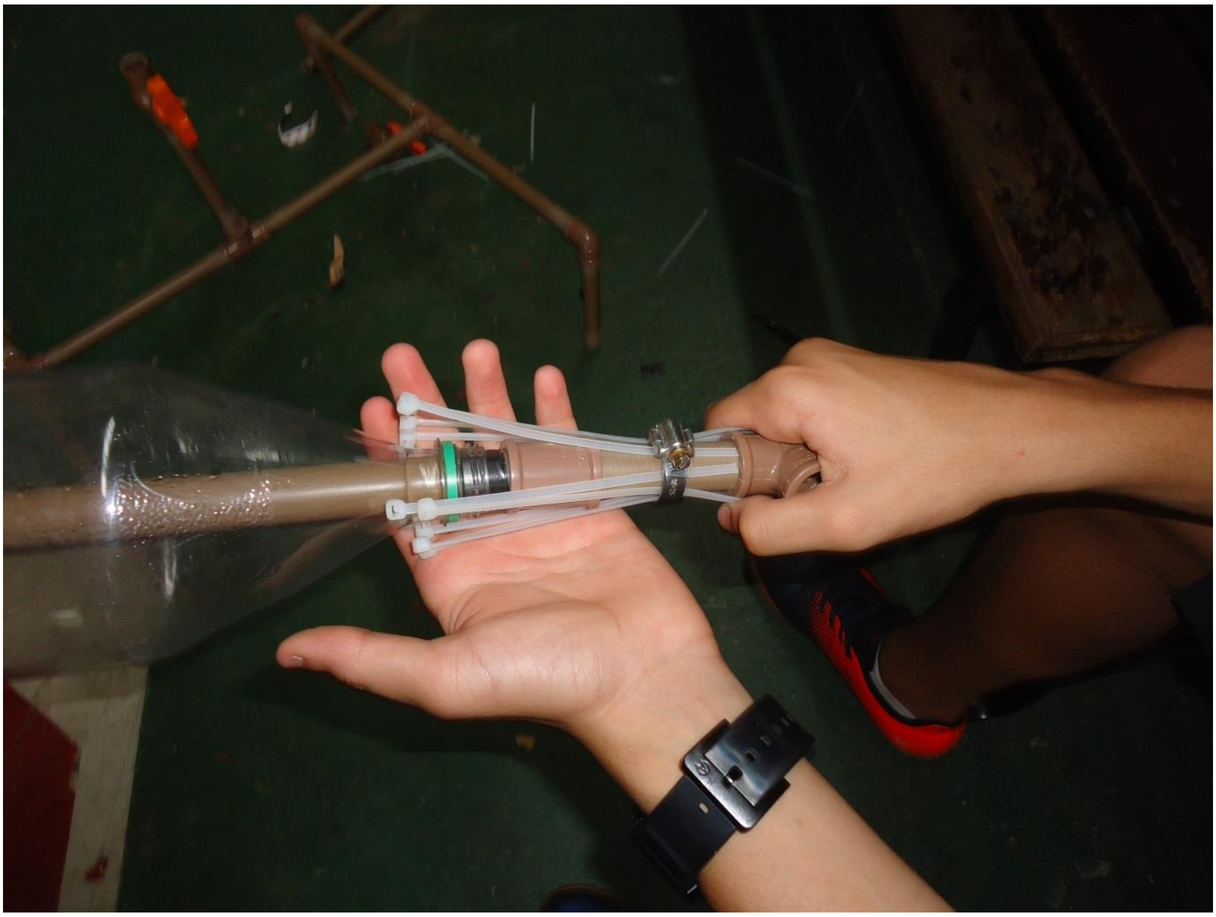

Figura 5.12: Montagem do sistema de retenção do foguete na base.

No próximo Capítulo apresentaremos os objetivos do projeto de lançamento de foguete com garrafa pet e como será desenvolvido.

6 O PROJETO: LANÇAMENTO DE FOGUETES

O projeto surgiu como um desafio dos professores de Matemática, Física, História e Artes a levarem os alunos do 9º ano do ensino fundamental a:

- Relacionar conteúdos de sala de aula a situações práticas, onde as teorias sejam associadas a situações práticas;
- Utilizar dados matemáticos e artísticos como simetria e ornamentação;
- Observar os conceitos matemáticos e físicos na estrutura de lançamento;
- Testar leis da Física aplicáveis ao voo de um foguete;
- Introduzir conceitos de Astronáutica, ciência que proporciona o conhecimento da navegação espacial;
- Construir protótipo de foguete para simular uma situação real de lançamento na vertical;
- Tornar público este saber e despertar a curiosidade e o interesse do jovem pela área de pesquisa espacial;
- Levantar fatos históricos da utilização de foguetes, tanto nos auges de seus lançamentos como a ida do homem a lua, até aos cumes de mau uso nos processos de destruição em guerras.

O projeto teve como intuito contribuir para suprir a necessidade de trabalhar atividades experimentais com alunos, pois se mostra como uma atividade motivadora que proporciona uma maneira diferente para trabalhar conceitos das disciplinas de Matemática, Física, História e Artes. Segundo Abib [6],

> O uso de atividades experimentais tende a propiciar a construção de um ambiente motivador, agradável, estimulante e rico em situações novas e desafiadoras que, quando bem empregadas, aumentam a probabilidade de que sejam elaborados conhecimentos e sejam desenvolvidas habilidades, atitudes e competências relacionadas ao fazer e entender a Ciência.

Muitos defendem que atividades experimentais, utilizadas como estratégia de ensino, pode desencadear no aluno um maior interesse pela disciplina de

Matemática, melhorando a aprendizagem. Segundo Neves, Caballero; Moreira, 2006. [7]

> “O trabalho experimental tem uma reconhecida importância na aprendizagem de Ciências, largamente aceita entre a comunidade científica e pelos professores como metodologia de ensino”.

6.1 O Projeto

A competição de lançamento de foguetes com garrafa pet será realizada com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, que formarão equipes de no máximo 5 participantes. A competição será dividida em duas categorias:

- Primeira Categoria: Maior Distância

Cada equipe terá direito a fazer três lançamentos alternados com as outras equipes, onde serão anotadas as suas marcas. Para que não exista nenhuma dúvida, em relação a esta categoria, a distância a ser registrada será dá base de lançamento até a ponta superior do foguete, após a sua total parada.

- Segunda Categoria: Precisão

Cada equipe terá direito a fazer três lançamentos alternados com as outras equipes, onde terão que acertar um alvo localizado, no chão, a vinte metros de distância da base de lançamento. A pontuação do alvo será distribuída da seguinte maneira: 100 pontos para a parte amarela, 75 pontos para parte vermelha, 50 pontos para parte azul e 25 pontos para a parte preta. Para que não exista nenhuma dúvida, em relação a esta categoria, a pontuação será dada após a total parada do foguete.

As inscrições serão feitas pelos professores das disciplinas de Matemática, Física, História e Artes em um formulário cedido pelos professores.

Serão realizadas duas oficinas com os alunos. A primeira oficina será destinada a construção do foguete de garrafa pet e a base de lançamento. A segunda oficina será para que os alunos possam testar suas bases de lançamento e para que sejam feitas as correções necessárias para o lançamento do foguete.

7 RESULTADOS

O projeto de lançamento de foguete com garra pet teve início no 2º Bimestre, quando se iniciou o conteúdo de equações do 2º grau. Foi mostrado ao aluno a resolução das equações do 2º grau através do completamento de quadrados, forma canônica e “fórmula de Bhaskará”. No 3º Bimestre dando continuidade a parte teórica do projeto foi passado ao aluno o conteúdo de função quadrática, onde foi estudado a forma canônica, valor máximo e mínimo da função, zeros da função, forma fatorada, análise do sinal da função, gráfico da função. Durante o estudo do gráfico da função quadrática os alunos foram levados ao laboratório onde puderam conhecer o *software* Geogrebra, que possibilitou ao aluno durante o manuseio do *software* ver graficamente as mudanças que ocorrem no gráfico enquanto se variava os coeficientes **a**, **b** e **c** da função quadrática.

Após o aluno ter conhecimento da parte teórica de equações do 2º grau e função quadrática ocorreu a divulgação do campeonato de lançamento de foguetes de garrafa pet, para que o aluno pudesse vivenciar na prática os conteúdos estudados em sala de aula.

Depois de feitas as inscrições de 12 grupos, foram marcadas oficinas para construção da base de lançamento. Nessas oficinas participaram os professores das disciplinas de Matemática, Física, História e Artes, além da participação de um grande número de alunos acompanhado de seus pais. Essa oficina foi registrada com fotos (Apêndice A).

Logo após todas as equipes estarem com suas bases de lançamento prontas e foguetes construídos, foi marcado uma nova oficina em campo aberto para que fossem realizados os testes de lançamento e verificação da estabilidade do foguete de garrafa pet, pois esse é um ponto fundamental para que o foguete mantenha sua trajetória durante o voo. Foram realizados também testes para se determinar qual o melhor ângulo de lançamento para que o foguete atingisse a maior distância e qual a quantidade ideal de água que se deveria abastecer o foguete para obter o melhor desempenho. O principal destaque foi a participação em massa dos alunos e de seus pais. Essa oficina foi registrada com fotos (Apêndice B).

Após a realização de vários testes e de alguns ajustes e orientações em sala de aula para que fossem sanados todos os problemas em relação a vazamentos na base de lançamento, a estabilidade dos foguetes, ao ângulo de lançamento e quantidade água ideal para o lançamento, foi marcado o dia para que acontecesse a competição de lançamento dos foguetes. Esse convite foi estendido a toda comunidade escolar e aos pais e familiares. A competição contou com a participação de todas as equipes inscritas e também com grande parte da comunidade escolar que foram prestigiar o evento e torcer por seus colegas. O apoio de todos os professores envolvidos no projeto e de parte da equipe técnica da escola foi de fundamental importância para o êxito do projeto. O evento foi registrado com fotos. (Apêndice C).

Após a realização da competição foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 7.1: Resultados da competição de lançamento de foguetes categoria distância

Categoria: Distância				
Equipes	1ª Tentativa	2ª Tentativa	3ª Tentativa	Colocação
1	41 m	54 m	39 m	5ª
2	43 m	8,2 m	63,2 m	2ª
3	15,9 m	1 m	-	10ª
4	28,5 m	-	32,5 m	8ª
5	-	20,5 m	45 m	7ª
6	84 m	84 m	93 m	1ª
7	52 m	51,3 m	59 m	4ª
8	-	15,2 m	-	11ª
9	16,7 m	14 m	-	9ª
10	53 m	51 m	30 m	6ª
11	-	11,3 m	-	13ª
12	61,4 m	58 m	51,5 m	3ª

Fonte: Colégio Classe A

Portanto sagrou-se campeã a equipe número 6 com a distância máxima atingida de 93 m. Podemos destacar que a equipe campeã demonstrou um grande comprometimento durante o andamento do projeto, pois a mesma esteve presente em todas as oficinas realizadas com os professores. A equipe dedicou-se ao máximo na construção da base de lançamento e na construção do foguete de garrafa pet. A equipe realizou vários testes e verificou que para se atingir a maior distância o ângulo de lançamento deveria estar entre 43º e 47º e que o foguete deveria estar com um terço (de água) da capacidade máxima da garrafa.

Utilizando o *software* Epi Info, versão 3.5.2, dezembro de 2010, para realizar uma análise mais detalhada da Tabela 7.1 encontramos os seguintes resultados:

- Na 1ª tentativa tivemos uma média de distância de aproximadamente 43,9 m. A menor distância alcançada foi 15 m e a maior 84 m, 55,5% dos grupos ficaram abaixo da média e 44,5% acima da média.
- Na 2ª tentativa tivemos uma média de distância de aproximadamente 33,5 m. A menor distância alcançada foi 1 m e a maior 84 m, 54,54% dos grupos ficaram abaixo da média e 45,46% acima da média.
- Na 3ª tentativa tivemos uma média de distância de aproximadamente 51,6 m. A menor distância alcançada foi 30 m e a maior 93 m, 50% dos grupos ficaram abaixo da média e 50% acima da média.

Analisando as informações obtidas com software Epi Info concluímos que houve uma melhora significativa nos lançamentos, pois tivemos uma média de 43,9 m na 1ª tentativa e já na 3ª tentativa obtivemos uma média de 51,6 m e 50% dos grupos ficaram acima da média.

Tabela 7.2: Resultados da competição de lançamento de foguetes categoria precisão

Categoria: Precisão					
Equipes	Tentativas			Total de Pontos	Colocação
	1ª	2ª	3ª		
1	0	25	50	75	4ª
2	0	50	75	125	2ª
3	0	25	0	25	5ª
4	0	0	0	0	6ª
5	25	0	0	25	5ª
6	25	75	50	150	1ª
7	0	0	25	25	5ª
8	25	50	0	75	4ª

9	0	0	25	25	5ª
10	0	25	0	25	5ª
11	0	0	25	25	5ª
12	0	75	25	100	3ª

Fonte: Colégio Classe A

Portanto mais uma vez sagrou-se campeã a equipe número 6 com 150 pontos. Podemos destacar que nesta categoria a equipe realizou teste e verificou que o alvo poderia ser atingido de duas formas. A primeira seria com um ângulo de 25º e o foguete cheio de água com um terço de sua capacidade. A segunda com um ângulo de 65º e o foguete também cheio de água com um terço de sua capacidade.

Após a competição houve uma confraternização entre alunos pais e professores, bem como a premiação das equipes vencedoras.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta desse trabalho foi explicitar uma possibilidade de ensino de forma interativa e aberta das equações do 2º grau e das funções quadráticas, em que o aluno ao invés de decorar uma série de fórmulas sem significado, substituindo apenas valores e encontrando o resultado de uma forma mecânica e repetitiva, possa priorizar o ensino lógico dedutivo, onde o professor possa construir todo conteúdo justificando cada passo, proporcionando ao aluno, a oportunidade de parar, pensar, refletir e analisar de forma consciente cada situação que vier a se deparar. Essa busca de aprender é o que esperamos dos alunos e que o professor consiga instiga-los ensinando os conteúdos de maneira adequada.

Visando esse fim, buscou-se também criar situações de aprendizagem que favorecessem ao aluno atribuir sentido ao conteúdo em questão, sugerindo-se a construção de um foguete de garrafa pet e de uma base de lançamento. Tal proposta, além de propiciar a significação de conceitos estudados em sala de aula, contribuiu para que o aluno fosse capaz de verificar na prática os conteúdos abordados em sala de aula, além de melhorar o relacionamento aluno-professor e professor-família, visto que houve uma grande participação dos pais nesse projeto.

9 REFERÊNCIAS

[1] AABOE, Asger. Episódio da História Antiga da Matemática. Tradução João Bosco Pitombeira de Carvalho. 2. ed. Rio de janeiro: SBM, 2002, 178 p.

[2] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2004, 843 p.

[3] LIMA, Elon Lages. Matemática e Ensino. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007, 207 p.

[4] LIMA, Elon Lages et al. A Matemática do Ensino Médio. Vol. I. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006, 237 p.

[5] LIMA, Elon Lages et al. Temas e Problemas Elementares. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, 246 p.

[6] ARAÚJO, M. S. T. de; ABIB, M. L. V. dos S. Atividades experimentais no ensino de física: diferentes enfoques, diferentes finalidades. Revista Brasileira de Ensino de Física. Vol.25 nº 2. São Paulo, Junho, 2003.

[7] NEVES, M. S.; CABALLERO, C.; MOREIRA, M. A. Repensando o papel do trabalho experimental, na aprendizagem da física, em sala de aula - um estudo exploratório. Investigações em Ensino de Ciências, Porto Alegre, v.11, n.3, 2006.

[8] SOUZA, James Alves de. Um foguete de garrafas pet. Artigo. Departamento de Física, Universidade de São Carlos, São Carlos, São Paulo, SP, Brasil, 2007.

[9] OLIVEIRA, Marco Antônio Sodré. Os Aspectos Físicos e Matemáticos do Lançamento de Foguete de Garrafa Pet. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Física. Universidade Católica de Brasília, Brasília, DF, 2008.

[10] JÚNIOR, José Ferreira da Silva. Uma Abordagem Dialógica para Utilização de Atividades Experimentais em Sala de Aula. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2010.

[11] ABIB, M. L. V. S.; ARAÚJO, M. S. T. Atividades Experimentais no Ensino de Física: Diferentes Enfoques, Diferentes Finalidades. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v.25, n.2, p.176-194, 2003.

[12] NEVES, M. S.; CABALLERO, C.; MOREIRA, M. A. Repensando o papel do trabalho experimental, na aprendizagem da física, em sala de aula - um estudo exploratório.**Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v.11, n.3, 2006. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol11/n3/31indice.html>. Acesso em: 18 dez. 2013.

[13] HOHENWARTER, Markus. HOHENWARTER, Judith. Ajuda Geogebra: Manual Oficial da Versão 3.2. Tradução e adaptação para português de Portugal António Ribeiro.Maio 2009. Disponível em <http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 20 dez. 2013.

APÊNDICE A – Oficina para Construção da Base de Lançamento

Figura 6.1: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.2: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.3: Oficina para construção da base de lançamento.

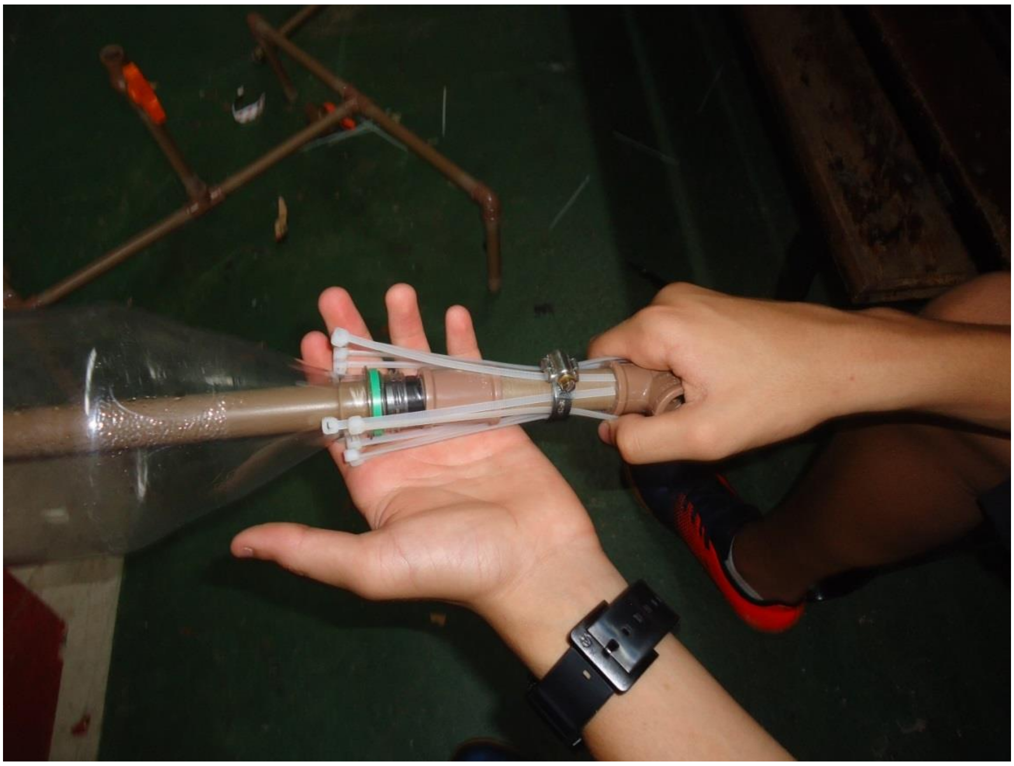

Figura 6.4: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.5: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.6: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.7: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.8: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.9: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.10: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.11: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.12: Oficina para construção da base de lançamento.

Figura 6.13: Oficina para construção da base de lançamento.

APÊNDICE B – Oficina para Realização de Testes de Estabilidade do Foguete

Figura 6.14: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.15: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.16: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.17: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.18: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.19: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.20: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.21: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.22: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.23: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.24: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.25: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

Figura 6.26: Oficina para realização dos testes de lançamento dos foguetes de garrafa pet.

APÊNDICE C – Fotos do Campeonato de Lançamento de Foguete de Garrafa Pet

Figura 6.27: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.28: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.29: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.30: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.31: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.32: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.33: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.34: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.35: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.36: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.37: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.38: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.39: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.40: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.41: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Fonte: Própria

Figura 6.42: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.43: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.44: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.45: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.46: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.47: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.48: Fotos da competição de lançamento de foguete.

Figura 6.49: Fotos da competição de lançamento de foguete.